Logische Complexiteit

VII : Turingmachines

Jeroen Goudsmit
Universiteit Utrecht
dinsdag 28 februari 2012

Inleveropgave 2.3.b

Lemma
De onderstaande taal $\mathcal{L}$ over $\Sigma = \{1, 2\}$ is wel regulier.

$$\left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; 1 \text{ komt minstens } 3^{2012} \text{ keer voor in } w \right\}$$

Inleveropgave 2.3.b

Lemma
De onderstaande taal $\mathcal{L}$ over $\Sigma = \{1, 2\}$ is wel regulier.

$$\left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; 1 \textit{ komt minstens } 3^{2012} \textit{ keer voor in } w \right\}$$

Bewijs.
We geven de DFA $M = \langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \qquad \rangle$.

Inleveropgave 2.3.b

Lemma

De onderstaande taal $\mathcal{L}$ over $\Sigma = \{1, 2\}$ is ***wel*** *regulier.*

$$\left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; 1 \textit{ komt minstens } 3^{2012} \textit{ keer voor in } w \right\}$$

$\{0, 1, \ldots, 3^{2012}, \infty\}$

Bewijs.

We geven de DFA $M = \langle\, Q, \Sigma, \delta, 0 \;, \{\infty\} \,\rangle$. Definieer

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q, \quad \begin{cases} (n, 1) \mapsto n + 1 \\ (n, 2) \mapsto n \end{cases}$$

Inleveropgave 2.3.b

Lemma

De onderstaande taal $\mathcal{L}$ over $\Sigma = \{1, 2\}$ is wel regulier.

$$\{w \in \Sigma^* \mid 1 \text{ komt minstens } 3^{2012} \text{ keer voor in } w\}$$

$\{0, 1, \ldots, 3^{2012}, \infty\}$

Bewijs.

We geven de DFA $M = \langle Q, \Sigma, \delta, 0, \{\infty\} \rangle$. Definieer

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q, \quad \begin{cases} (n, 1) \mapsto n + 1 \\ (n, 2) \mapsto n \end{cases}$$

Nu geldt $\delta^\bullet(w) = \infty$ dan en slechts dan als $w \in \mathcal{L}$. ∎

Inleveropgave 2.3.c

Lemma

De onderstaande taal $\mathcal{L}$ over $\Sigma = \{a, e, f, l, p, s\}$ en is niet regulier.

$$\mathcal{L} := \left\{ \, w \in \Sigma^* \;\middle|\; \textit{appelflap komt even vaak voor in } w \textit{ als appelsap} \, \right\}$$

Inleveropgave 2.3.c

Lemma

De onderstaande taal $\mathcal{L}$ over $\Sigma = \{a, e, f, l, p, s\}$ en is niet regulier.

$$\mathcal{L} := \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \textit{appelflap komt even vaak voor in } w \textit{ als appelsap} \right\}$$

Bewijs.

Stel $\mathcal{L}$ is wel regulier.

Inleveropgave 2.3.c

Lemma

De onderstaande taal $\mathcal{L}$ over $\Sigma = \{a, e, f, l, p, s\}$ en is niet regulier.

$$\mathcal{L} := \left\{\ w \in \Sigma^* \ \middle|\ \textit{appelflap komt even vaak voor in } w \textit{ als appelsap}\ \right\}$$

Bewijs.

Stel $\mathcal{L}$ is wel regulier. Dan is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &:= \mathcal{L} \cap \mathcal{L}\left(\,(appelflap)^*(appelsap)^*\,\right) \\ &= \left\{\ (appelflap)^n(appelsap)^n \ \middle|\ n \in \mathbb{N}\ \right\} \end{aligned}$$

ook regulier.

Inleveropgave 2.3.c

Lemma

De onderstaande taal $\mathcal{L}$ over $\Sigma = \{a, e, f, l, p, s\}$ en is niet regulier.

$$\mathcal{L} := \left\{ \, w \in \Sigma^* \;\middle|\; \textit{appelflap komt even vaak voor in } w \textit{ als appelsap} \, \right\}$$

Bewijs.

Stel $\mathcal{L}$ is wel regulier. Dan is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &:= \mathcal{L} \cap \mathcal{L}\left((appelflap)^*(appelsap)^* \right) \\ &= \left\{ \, (appelflap)^n(appelsap)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \, \right\} \end{aligned}$$

ook regulier. Wegens het pomplemma is er een pomplengte $p \in \mathbb{N}$ van $\mathcal{L}'$.

Inleveropgave 2.3.c

Lemma
De onderstaande taal $\mathcal{L}$ over $\Sigma = \{a, e, f, l, p, s\}$ en is niet regulier.

$$\mathcal{L} := \left\{ \, w \in \Sigma^* \;\middle|\; \textit{appelflap komt even vaak voor in } w \textit{ als appelsap} \, \right\}$$

Bewijs.

Stel $\mathcal{L}$ is wel regulier. Dan is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &:= \mathcal{L} \cap \mathcal{L}\,(\,(appelflap)^*(appelsap)^*\,) \\ &= \left\{ \, (appelflap)^n(appelsap)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \, \right\} \end{aligned}$$

ook regulier. Wegens het pomplemma is er een pomplengte $p \in \mathbb{N}$ van $\mathcal{L}'$. Bekijk $w = (appelflap)^p(appelsap)^p \in \mathcal{L}'$ met $|w| = 17p \geq p$.

Inleveropgave 2.3.c

Lemma
De onderstaande taal $\mathcal{L}$ over $\Sigma = \{a, e, f, l, p, s\}$ en is niet regulier.

$$\mathcal{L} := \left\{\ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \textit{appelflap komt even vaak voor in w als appelsap}\ \right\}$$

Bewijs.

Stel $\mathcal{L}$ is wel regulier. Dan is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &:= \mathcal{L} \cap \mathcal{L}\left(\,(appelflap)^*(appelsap)^*\,\right) \\ &= \left\{\ (appelflap)^n(appelsap)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\ \right\} \end{aligned}$$

ook regulier. Wegens het pomplemma is er een pomplengte $p \in \mathbb{N}$ van $\mathcal{L}'$. Bekijk $w = (appelflap)^p(appelsap)^p \in \mathcal{L}'$ met $|w| = 17p \geq p$. Er zijn nu $x, y, z \in \Sigma^*$ zodat $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$ en $xy^iz \in \mathcal{L}'$ voor alle $i \in \mathbb{N}$.

Inleveropgave 2.3.c

Lemma

De onderstaande taal $\mathcal{L}$ over $\Sigma = \{a, e, f, l, p, s\}$ en is niet regulier.

$$\mathcal{L} := \left\{\ w \in \Sigma^* \ \middle|\ \textit{appelflap komt even vaak voor in w als appelsap}\ \right\}$$

Bewijs.

Stel $\mathcal{L}$ is wel regulier. Dan is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &:= \mathcal{L} \cap \mathcal{L}\left(\,(appelflap)^*(appelsap)^*\,\right) \\ &= \left\{\ (appelflap)^n(appelsap)^n \ \middle|\ n \in \mathbb{N}\ \right\} \end{aligned}$$

ook regulier. Wegens het pomplemma is er een pomplengte $p \in \mathbb{N}$ van $\mathcal{L}'$. Bekijk $w = (appelflap)^p(appelsap)^p \in \mathcal{L}'$ met $|w| = 17p \geq p$. Er zijn nu $x, y, z \in \Sigma^*$ zodat $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$ en $xy^iz \in \mathcal{L}'$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. Nu bevat y wat stukjes *appelflap*, en bevat x een aantal keer *appelflap* plus wat kruimels.

Inleveropgave 2.3.c

Lemma

De onderstaande taal $\mathcal{L}$ over $\Sigma = \{a, e, f, l, p, s\}$ en is niet *regulier.*

$$\mathcal{L} := \left\{\ w \in \Sigma^* \ \middle|\ \textit{appelflap komt even vaak voor in } w \textit{ als appelsap}\ \right\}$$

Bewijs.

Stel $\mathcal{L}$ is wel regulier. Dan is

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &:= \mathcal{L} \cap \mathcal{L}\left(\,(appelflap)^*(appelsap)^*\,\right)\\ &= \left\{\ (appelflap)^n(appelsap)^n \ \middle|\ n \in \mathbb{N}\ \right\}\end{aligned}$$

ook regulier. Wegens het pomplemma is er een pomplengte $p \in \mathbb{N}$ van $\mathcal{L}'$. Bekijk $w = (appelflap)^p(appelsap)^p \in \mathcal{L}'$ met $|w| = 17p \geq p$. Er zijn nu $x, y, z \in \Sigma^*$ zodat $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$ en $xy^iz \in \mathcal{L}'$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. Nu bevat y wat stukjes *appelflap*, en bevat x een aantal keer *appelflap* plus wat kruimels. In xz is een hap genomen uit het p tal herhalingen van *appelflap*.

Inleveropgave 2.3.c

Lemma

De onderstaande taal $\mathcal{L}$ over $\Sigma = \{a, e, f, l, p, s\}$ en is niet regulier.

$$\mathcal{L} := \left\{\ w \in \Sigma^* \ \middle|\ \textit{appelflap komt even vaak voor in } w \textit{ als appelsap}\ \right\}$$

Bewijs.

Stel $\mathcal{L}$ is wel regulier. Dan is

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &:= \mathcal{L} \cap \mathcal{L}\left(\,(appelflap)^*(appelsap)^*\,\right) \\ &= \left\{\ (appelflap)^n(appelsap)^n \ \middle|\ n \in \mathbb{N}\ \right\} \end{aligned}$$

ook regulier. Wegens het pomplemma is er een pomplengte $p \in \mathbb{N}$ van $\mathcal{L}'$. Bekijk $w = (appelflap)^p(appelsap)^p \in \mathcal{L}'$ met $|w| = 17p \geq p$. Er zijn nu $x, y, z \in \Sigma^*$ zodat $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$ en $xy^iz \in \mathcal{L}'$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. Nu bevat y wat stukjes *appelflap*, en bevat x een aantal keer *appelflap* plus wat kruimels. In xz is een hap genomen uit het p tal herhalingen van *appelflap*. Dus zit xz niet in $\mathcal{L}'$, tegenspraak.

Inleveropgave 2.3.c

Lemma

De onderstaande taal $\mathcal{L}$ over $\Sigma = \{a, e, f, l, p, s\}$ en is niet regulier.

$$\mathcal{L} := \left\{\ w \in \Sigma^* \ \middle|\ \textit{appelflap komt even vaak voor in } w \textit{ als appelsap}\ \right\}$$

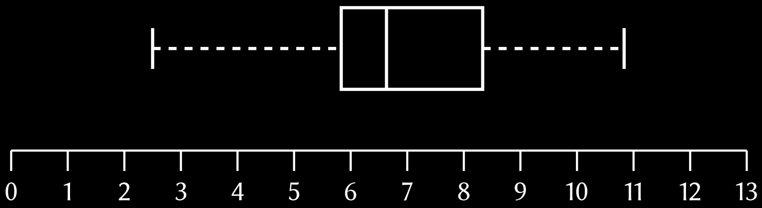
Bewijs.

Stel $\mathcal{L}$ is wel regulier. Dan is

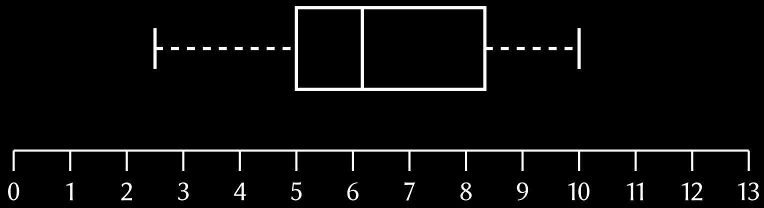
$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &:= \mathcal{L} \cap \mathcal{L}\left(\,(appelflap)^*(appelsap)^*\,\right)\\ &= \left\{\ (appelflap)^n(appelsap)^n \ \middle|\ n \in \mathbb{N}\ \right\}\end{aligned}$$

ook regulier. Wegens het pomplemma is er een pomplengte $p \in \mathbb{N}$ van $\mathcal{L}'$. Bekijk $w = (appelflap)^p(appelsap)^p \in \mathcal{L}'$ met $|w| = 17p \geq p$. Er zijn nu $x, y, z \in \Sigma^*$ zodat $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$ en $xy^iz \in \mathcal{L}'$ voor alle $i \in \mathbb{N}$. Nu bevat y wat stukjes *appelflap*, en bevat x een aantal keer *appelflap* plus wat kruimels. In xz is een hap genomen uit het p tal herhalingen van *appelflap*. Dus zit xz niet in $\mathcal{L}'$, tegenspraak. Dus is $\mathcal{L}$ niet regulier. ∎

Inleveropgave 2



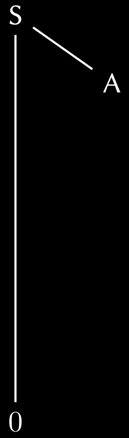
Inleveropgave 2



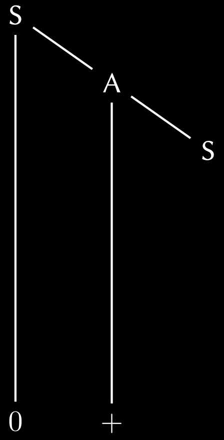
Inleveropgave 3.1

S

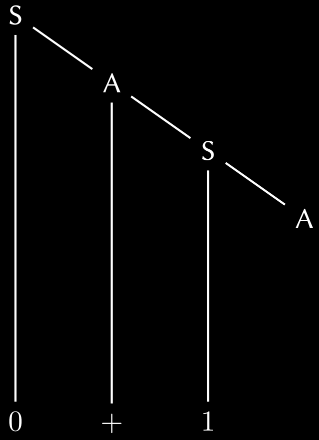
Inleveropgave 3.1



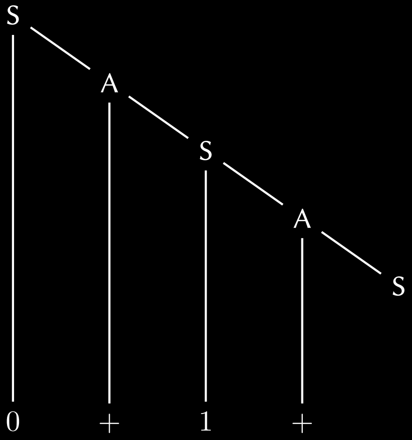
Inleveropgave 3.1



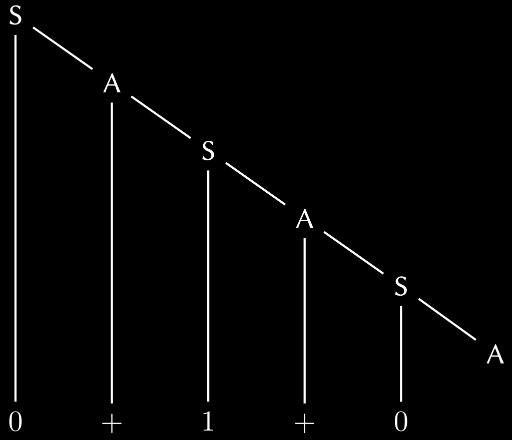
Inleveropgave 3.1



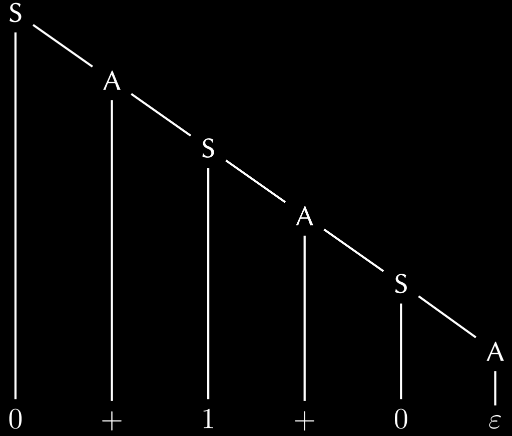
Inleveropgave 3.1



Inleveropgave 3.1



Inleveropgave 3.1



Inleveropgave 3.2.3

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ is een palindroom}\}$ *is context-vrij.*

Inleveropgave 3.2.3

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ is een palindroom}\}$ *is context-vrij.*

Bewijs.
We claimen $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(\mathrm{S} \to \varepsilon \mid a \mid b \mid a\ \mathrm{S}\ a \mid b\ \mathrm{S}\ b)$.

Inleveropgave 3.2.3

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ is een palindroom}\}$ *is context-vrij.*

Bewijs.
We claimen $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(\,\mathrm{S} \to \varepsilon \mid a \mid b \mid a\ \mathrm{S}\ a \mid b\ \mathrm{S}\ b\,)$.
Stel $w \in \mathcal{L}$ en $|w| \leq n$.

Als $n = 0$ dan $\mathrm{S} \Rightarrow \varepsilon$.

Inleveropgave 3.2.3

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ is een palindroom}\}$ *is context-vrij.*

Bewijs.
We claimen $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathrm{S} \to \varepsilon \mid a \mid b \mid a\ \mathrm{S}\ a \mid b\ \mathrm{S}\ b)$.
Stel $w \in \mathcal{L}$ en $|w| \leq n$.

Als $n = 0$ dan $\mathrm{S} \Rightarrow \varepsilon$.
Als $n = 1$ dan $\mathrm{S} \Rightarrow w$ omdat $w = a$ of $w = b$.

Inleveropgave 3.2.3

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ is een palindroom}\}$ *is context-vrij.*

Bewijs.
We claimen $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(\,\mathrm{S} \to \varepsilon \mid a \mid b \mid a\ \mathrm{S}\ a \mid b\ \mathrm{S}\ b\,)$.
Stel $w \in \mathcal{L}$ en $|w| \leq n$.

Als $n = 0$ dan $\mathrm{S} \Rightarrow \varepsilon$.
Als $n = 1$ dan $\mathrm{S} \Rightarrow w$ omdat $w = a$ of $w = b$.
Als $n \leq m + 2$ dan $w = x\ v\ y$ met $x = y$ en $v \in \mathcal{L}$.

Inleveropgave 3.2.3

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ is een palindroom}\}$ *is context-vrij.*

Bewijs.
We claimen $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(\,\mathrm{S} \to \varepsilon \mid a \mid b \mid a\ \mathrm{S}\ a \mid b\ \mathrm{S}\ b\,)$.
Stel $w \in \mathcal{L}$ en $|w| \leq n$.

Als $n = 0$ dan $\mathrm{S} \Rightarrow \varepsilon$.
Als $n = 1$ dan $\mathrm{S} \Rightarrow w$ omdat $w = a$ of $w = b$.
Als $n \leq m + 2$ dan $w = x\ v\ y$ met $x = y$ en $v \in \mathcal{L}$. Zie $|v| = m \leq m + 2$ dus $\mathrm{S} \overset{*}{\Rightarrow} v$. Daarmee ook $\mathrm{S} \Rightarrow x\ \mathrm{S}\ x \overset{*}{\Rightarrow} x\ v\ y = w$.

∎

Inleveropgave 3.2.3

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ is een palindroom}\}$ *is context-vrij.*

Bewijs.
We claimen $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(\,\mathrm{S} \rightarrow \varepsilon \mid a \mid b \mid a\ \mathrm{S}\ a \mid b\ \mathrm{S}\ b\,)$.
Stel $\mathrm{S} \overset{*}{\Rightarrow} w$ in n stappen.

■

Inleveropgave 3.2.3

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w$ *is een palindroom*$\}$ *is context-vrij.*

Bewijs.
We claimen $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(\,\mathrm{S} \to \varepsilon \mid a \mid b \mid a\ \mathrm{S}\ a \mid b\ \mathrm{S}\ b\,)$.
Stel $\mathrm{S} \overset{*}{\Rightarrow} w$ in n stappen.
 Als $n = 1$ dan $w = \varepsilon, a, b \in \mathcal{L}$.

∎

Inleveropgave 3.2.3

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w$ *is een palindroom*$\}$ *is context-vrij.*

Bewijs.
We claimen $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(\,\mathrm{S} \to \varepsilon \mid a \mid b \mid a\ \mathrm{S}\ a \mid b\ \mathrm{S}\ b\,)$.
Stel $\mathrm{S} \overset{*}{\Rightarrow} w$ in n stappen.
Als $n = 1$ dan $w = \varepsilon, a, b \in \mathcal{L}$.
Als $n = m + 1$ dan voor $x = a$ of $x = b$

$$\mathrm{S} \Rightarrow x\ \mathrm{S}\ x \overset{*}{\Rightarrow} x\ v\ x = w.$$

∎

Inleveropgave 3.2.3

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ is een palindroom}\}$ *is context-vrij.*

Bewijs.
We claimen $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(\mathrm{S} \to \varepsilon \mid a \mid b \mid a\ \mathrm{S}\ a \mid b\ \mathrm{S}\ b)$.
Stel $\mathrm{S} \overset{*}{\Rightarrow} w$ in n stappen.
Als $n = 1$ dan $w = \varepsilon, a, b \in \mathcal{L}$.
Als $n = m + 1$ dan voor $x = a$ of $x = b$

$$\mathrm{S} \Rightarrow x\ \mathrm{S}\ x \overset{*}{\Rightarrow} x\ v\ x = w.$$

Merk op dat $\mathrm{S} \overset{*}{\Rightarrow} v$ in m stappen, dus $v \in \mathcal{L}$.

$\blacksquare$

Inleveropgave 3.2.3

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid w$ *is een palindroom*$\}$ *is context-vrij.*

Bewijs.
We claimen $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,(\mathrm{S} \to \varepsilon \mid a \mid b \mid a\ \mathrm{S}\ a \mid b\ \mathrm{S}\ b)$.
Stel $\mathrm{S} \overset{*}{\Rightarrow} w$ in n stappen.
Als $n = 1$ dan $w = \varepsilon, a, b \in \mathcal{L}$.
Als $n = m + 1$ dan voor $x = a$ of $x = b$

$$\mathrm{S} \Rightarrow x\ \mathrm{S}\ x \overset{*}{\Rightarrow} x\ v\ x = w.$$

Merk op dat $\mathrm{S} \overset{*}{\Rightarrow} v$ in m stappen, dus $v \in \mathcal{L}$. Hiermee dus ook $xvx \in \mathcal{L}$ als gewenst.

∎

Evenveel

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid \textit{evenveel } a\textit{'s in } w \textit{ als } b\textit{'s}\}$ *is context-vrij.*

Evenveel

$\{a, b\}$

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid$ *evenveel a's in w als b's*$\}$ *is context-vrij.*

Lemma
$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathsf{E} \to \varepsilon \mid a\ \mathsf{E}\ b \mid b\ \mathsf{E}\ a \mid \mathsf{E}\ \mathsf{E})$.

Bewijs.

$\blacksquare$

Evenveel

$\{a, b\}$

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid \text{evenveel } a\text{'s in } w \text{ als } b\text{'s}\}$ *is context-vrij.*

Lemma
$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathsf{E} \to \varepsilon \mid a\ \mathsf{E}\ b \mid b\ \mathsf{E}\ a \mid \mathsf{E}\ \mathsf{E})$.

Bewijs.

$\blacksquare$

Evenveel

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \underbrace{\Sigma^*}_{\{a,\,b\}} \mid \underbrace{\#(w)}_{\text{verschil aantal } a\text{'s en } b\text{'s}} = 0\}$ *is context-vrij.*

Lemma
$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathsf{E} \to \varepsilon \mid a\ \mathsf{E}\ b \mid b\ \mathsf{E}\ a \mid \mathsf{E}\ \mathsf{E})$.

Bewijs.

$\blacksquare$

Evenveel

$\{a, b\}$

verschil aantal a's en b's

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{ w \in \Sigma^* \mid \#(w) = 0 \}$ *is context-vrij.*

Lemma
$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathsf{E} \to \varepsilon \mid a\ \mathsf{E}\ b \mid b\ \mathsf{E}\ a \mid \mathsf{E}\ \mathsf{E})$.

Bewijs.

Bekijk $t_i := \#(w_1 \ldots w_i)$.

∎

Evenveel

$\{a, b\}$

verschil aantal a's en b's

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid \#(w) = 0 \}$ *is context-vrij.*

Lemma
$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{E} \to \varepsilon \mid a\ \mathrm{E}\ b \mid b\ \mathrm{E}\ a \mid \mathrm{E}\ \mathrm{E})$.

Bewijs.

Bekijk $t_i := \#(w_1 \ldots w_i)$.
Als $t_i = 0$ voor een $1 < i < n$ dan $u = w_1 \ldots w_i$ en $v = w_{i+1} \ldots w_n$ in $\mathcal{L}$.

$\blacksquare$

Evenveel

$\{a, b\}$

verschil aantal a's en b's

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{ w \in \Sigma^* \mid \#(w) = 0 \}$ *is context-vrij.*

Lemma
$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{E} \to \varepsilon \mid a\ \mathrm{E}\ b \mid b\ \mathrm{E}\ a \mid \mathrm{E}\ \mathrm{E})$.

Bewijs.

Bekijk $t_i := \#(w_1 \ldots w_i)$.
Als $t_i = 0$ voor een $1 < i < n$ dan $u = w_1 \ldots w_i$ en $v = w_{i+1} \ldots w_n$ in $\mathcal{L}$. Dus ook $\mathrm{E} \stackrel{*}{\Rightarrow} u$ en $\mathrm{E} \stackrel{*}{\Rightarrow} v$. Hiermee $\mathrm{E} \stackrel{*}{\Rightarrow} \mathrm{E}\ \mathrm{E} \stackrel{*}{\Rightarrow} u\ v = w$.

$\blacksquare$

Evenveel

$\{a, b\}$

verschil aantal *a*'s en *b*'s

Lemma

De taal $\mathcal{L} := \{ w \in \Sigma^* \mid \#(w) = 0 \}$ *is context-vrij.*

Lemma

$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{E} \to \varepsilon \mid a\ \mathrm{E}\ b \mid b\ \mathrm{E}\ a \mid \mathrm{E}\ \mathrm{E})$.

Bewijs.

Bekijk $t_i := \#(w_1 \dots w_i)$.

Als $t_i = 0$ voor een $1 < i < n$ dan $u = w_1 \dots w_i$ en $v = w_{i+1} \dots w_n$ in $\mathcal{L}$. Dus ook $\mathrm{E} \overset{*}{\Rightarrow} u$ en $\mathrm{E} \overset{*}{\Rightarrow} v$. Hiermee $\mathrm{E} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{E}\ \mathrm{E} \overset{*}{\Rightarrow} u\ v = w$.

Als $t_i \neq 0$ voor alle $1 < i < n$, dan is alles positief of alles negatief.

∎

Evenveel

$\{a, b\}$

verschil aantal a's en b's

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{w \in \Sigma^* \mid \#(w) = 0\}$ *is context-vrij.*

Lemma
$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{E} \to \varepsilon \mid a\ \mathrm{E}\ b \mid b\ \mathrm{E}\ a \mid \mathrm{E}\ \mathrm{E})$.

Bewijs.

Bekijk $t_i := \#(w_1 \ldots w_i)$.
Als $t_i = 0$ voor een $1 < i < n$ dan $u = w_1 \ldots w_i$ en $v = w_{i+1} \ldots w_n$ in $\mathcal{L}$. Dus ook $\mathrm{E} \overset{*}{\Rightarrow} u$ en $\mathrm{E} \overset{*}{\Rightarrow} v$. Hiermee $\mathrm{E} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{E}\ \mathrm{E} \overset{*}{\Rightarrow} u\ v = w$.
Als $t_i \neq 0$ voor alle $1 < i < n$, dan is alles positief of alles negatief.
Stel $w_1 = a$ en zie dat $w_n = b$ moet volgen.

$\blacksquare$

Evenveel

$\{a, b\}$

verschil aantal a's en b's

Lemma

De taal $\mathcal{L} := \{ w \in \Sigma^* \mid \#(w) = 0 \}$ *is context-vrij.*

Lemma

$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathsf{E} \to \varepsilon \mid a\ \mathsf{E}\ b \mid b\ \mathsf{E}\ a \mid \mathsf{E}\ \mathsf{E})$.

Bewijs.

Bekijk $t_i := \#(w_1 \ldots w_i)$.
Als $t_i = 0$ voor een $1 < i < n$ dan $u = w_1 \ldots w_i$ en $v = w_{i+1} \ldots w_n$ in $\mathcal{L}$. Dus ook $\mathsf{E} \overset{*}{\Rightarrow} u$ en $\mathsf{E} \overset{*}{\Rightarrow} v$. Hiermee $\mathsf{E} \overset{*}{\Rightarrow} \mathsf{E}\ \mathsf{E} \overset{*}{\Rightarrow} u\ v = w$.
Als $t_i \neq 0$ voor alle $1 < i < n$, dan is alles positief of alles negatief.
Stel $w_1 = a$ en zie dat $w_n = b$ moet volgen. Immers, als niet dan
$0 = t_n = t_{n-1} + 1 > 0$. ∎

$\{a, b\}$

Evenveel

verschil aantal a's en b's

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{ w \in \Sigma^* \mid \#(w) = 0 \quad \}$ *is context-vrij.*

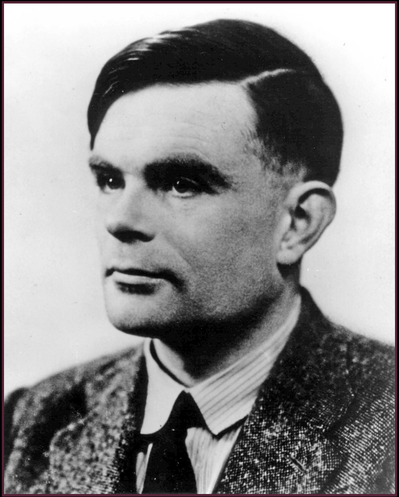
Lemma
$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}(\mathrm{E} \to \varepsilon \mid a\ \mathrm{E}\ b \mid b\ \mathrm{E}\ a \mid \mathrm{E}\ \mathrm{E})$.

Bewijs.

Bekijk $t_i := \#(w_1 \dots w_i)$.
Als $t_i = 0$ voor een $1 < i < n$ dan $u = w_1 \dots w_i$ en $v = w_{i+1} \dots w_n$ in $\mathcal{L}$. Dus ook $\mathrm{E} \overset{*}{\Rightarrow} u$ en $\mathrm{E} \overset{*}{\Rightarrow} v$. Hiermee $\mathrm{E} \overset{*}{\Rightarrow} \mathrm{E}\ \mathrm{E} \overset{*}{\Rightarrow} u\ v = w$.
Als $t_i \neq 0$ voor alle $1 < i < n$, dan is alles positief of alles negatief.
Stel $w_1 = a$ en zie dat $w_n = b$ moet volgen. Immers, als niet dan $0 = t_n = t_{n-1} + 1 > 0$. Zie $\mathrm{E} \Rightarrow a\ \mathrm{E}\ b \overset{*}{\Rightarrow} w$. ∎

deel II

Berekenbaarheid



Alan Mathison Turing

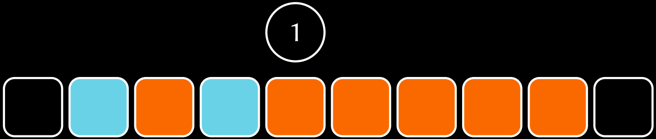
computerhistory.org

Voorbeeld: The Motion Picture

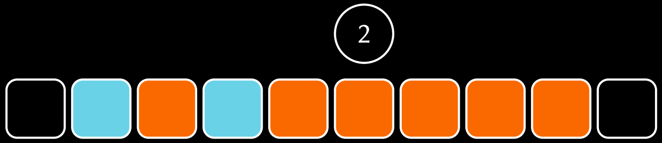
Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

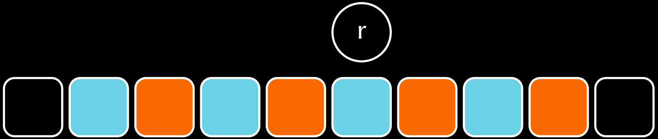
Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

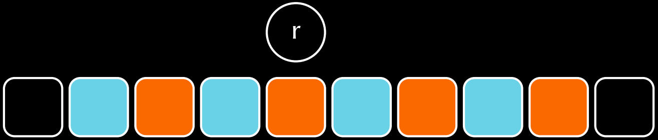
Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

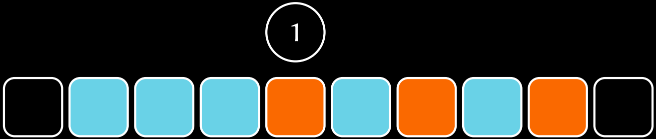
Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

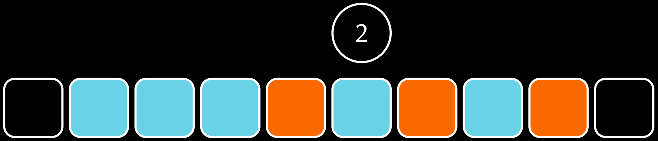
Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

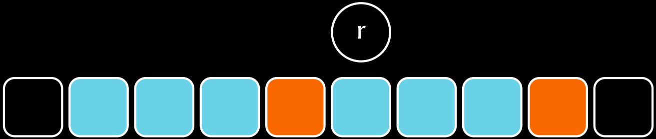
Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

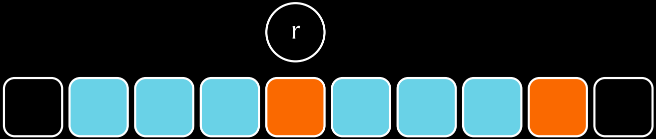
Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

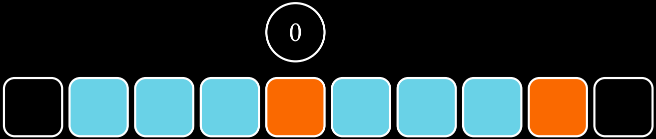
Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

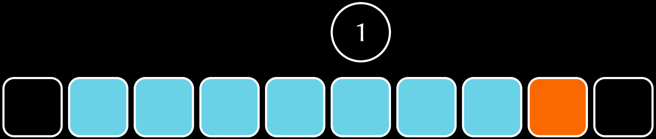
Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

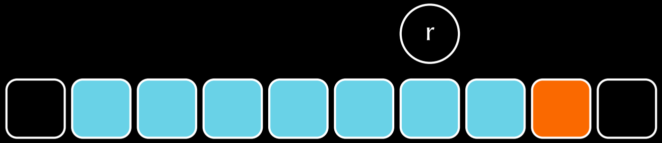
Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

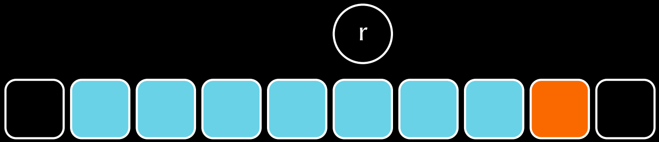
Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

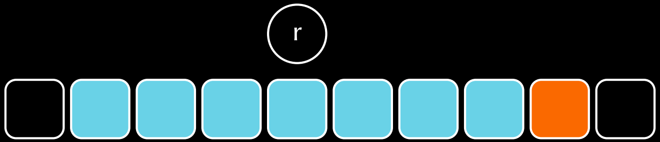
Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

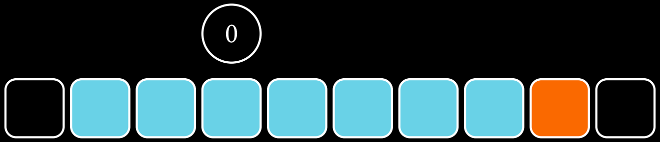
Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

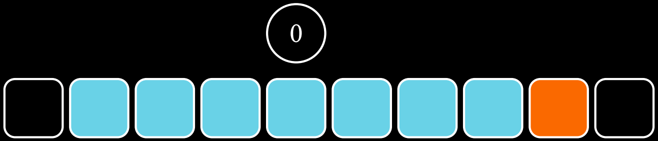
Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

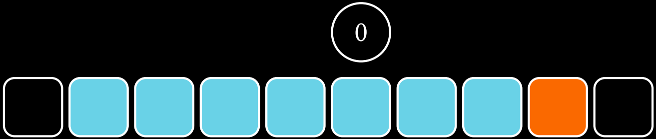
Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture



Voorbeeld: The Motion Picture



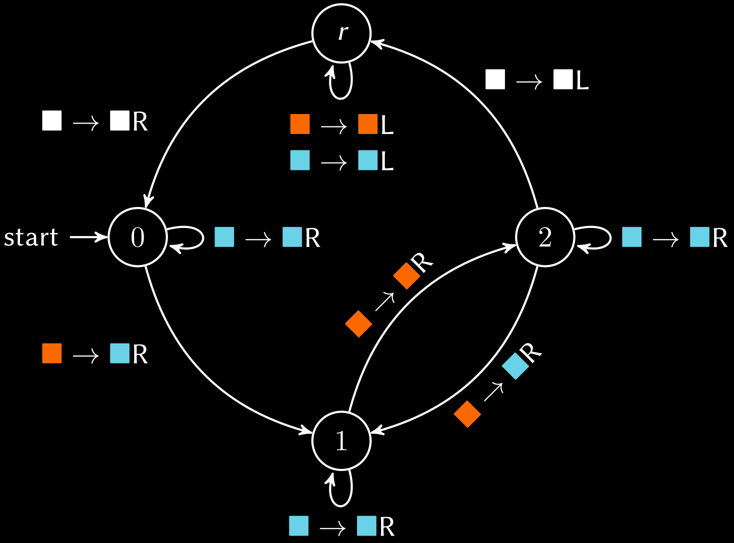
Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

Voorbeeld: The Motion Picture

The Search for Voorbeeld



Turingmachine

Definitie
Een Turingmachine M is een tupel $\langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}} \rangle$ met:

Q	eindige verzameling	toestanden
Σ	eindige verzameling	alfabet
Γ	eindige verzameling	tape alfabet
$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\mathsf{L}, \mathsf{R}\}$		transitiefunctie
$q_0 \in Q$		begintoestand
$q_{\text{accept}} \in Q$		accepteertoestand
$q_{\text{reject}} \in Q$		verwerptoestand

Turingmachine

Definitie
Een Turingmachine M is een tupel $\langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}} \rangle$ met:

Q	eindige verzameling	toestanden
$\blacksquare \notin \Sigma$	eindige verzameling	alfabet
$\blacksquare, \Sigma \subseteq \Gamma$	eindige verzameling	tape alfabet
$\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{\mathsf{L}, \mathsf{R}\}$		transitiefunctie
$q_0 \in Q$		begintoestand
$q_{\text{accept}} \in Q$		accepteertoestand
$q_{\text{reject}} \in Q$		verwerptoestand

Configuratie

$$\Gamma^* \times Q \times \Gamma^*$$

Berekening

$$\text{Als } \delta(q, y) = \langle\, r, z, \mathsf{L} \,\rangle \text{ dan}$$
$$wxqyv \vdash wqxzv$$

$\Vdash$ reflexief–transitieve afsluiting $\vdash$

Berekening

Als $\delta(q, y) = \langle\, r, z, \mathrm{R} \,\rangle$ dan
$$wxqyv \vdash wxzqv$$

$\Vdash$ reflexief–transitieve afsluiting $\vdash$

Taal

$$\mathcal{L}(M) := \{\ w \in \Sigma^* \mid M \text{ accepteert } w\ \}$$

Taal

$\langle\, Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}} \,\rangle$

$$\mathcal{L}(M) := \{\, w \in \Sigma^* \mid \text{M accepteert w} \,\}$$

$q_0 w \Vdash u q_{\text{accept}} v$

Gezien

Regulier

Pomplemma

Gezien

Regulier

Pomplemma

Context-Vrij

afleidingen maken
bewijzen
context-vrijheid

Gezien

Regulier

Pomplemma

Context-Vrij

afleidingen maken
bewijzen
context-vrijheid

Turing Machine

Configuraties
Berekeningen
Taal