# Logische Complexiteit

## IV : Context-Vrije Grammatica's

Jeroen Goudsmit
Universiteit Utrecht
donderdag 16 februari 2012

# Recursieve Omschrijving

$$\left\{ a^n b^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

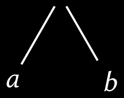
# Recursieve Omschrijving

$$\left\{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$a$ $\qquad$ $b$

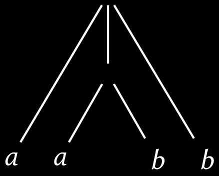
# Recursieve Omschrijving

$$\left\{ a^n b^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$



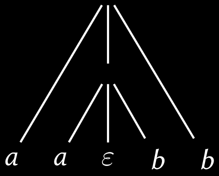
# Recursieve Omschrijving

$$\left\{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$



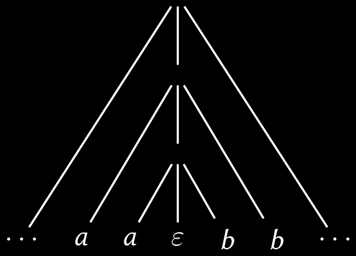
# Recursieve Omschrijving

$$\left\{a^n b^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}$$



# Recursieve Omschrijving

$$\left\{ a^n b^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$



# Context-vrije Grammatica

**Definitie**

Een CFG is een tupel $\langle V, \Sigma, R, S \rangle$ met:

| | | |
|---|---|---|
| $V$ | eindige verzameling | variabelen |
| $\Sigma$ | eindige verzameling | alfabet |
| $R$ | eindige verzameling | regels |
| $S \in V$ | | startvariabele |

**Definitie**

Een regel is een paar $A \rightarrow w$ met $A \in V$ en $w \in (\Sigma \cup V)^*$.

# Productie

$$\frac{\mathrm{A} \rightarrow w}{u\mathrm{A}v \Rightarrow uwv}$$

# Productie

$$\frac{A \rightarrow w}{uAv \Rightarrow uwv}$$

$$\frac{u = w_1 \Rightarrow w_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow w_n = v}{u \overset{*}{\Rightarrow} v}$$

# Voorbeeld

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & a\ S\ b \\
S & \rightarrow & \varepsilon
\end{array}
$$

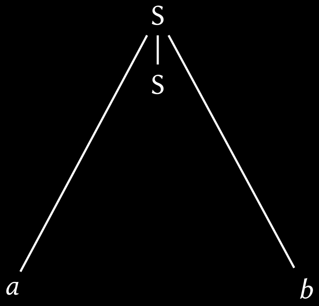
# Voorbeeld

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & a\ S\ b \\ S & \rightarrow & \varepsilon \end{array}$$

S

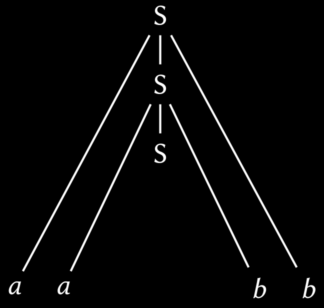
# Voorbeeld

$$\begin{array}{lll} S & \rightarrow & a\ S\ b \\ S & \rightarrow & \varepsilon \end{array}$$



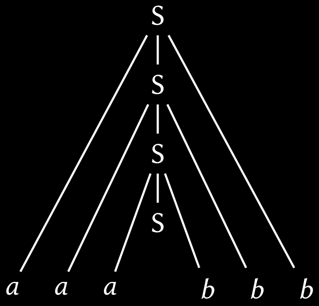
# Voorbeeld

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & a\ S\ b \\
S & \rightarrow & \varepsilon
\end{array}
$$



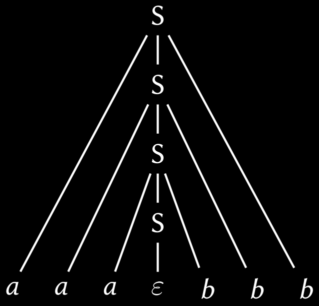
# Voorbeeld

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow a\,S\,b \\
S &\rightarrow \varepsilon
\end{aligned}
$$



# Voorbeeld

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{S} & \rightarrow & a\ \mathrm{S}\ b \\ \mathrm{S} & \rightarrow & \varepsilon \end{array}$$

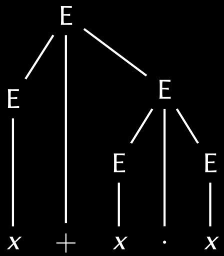


# Nog 'n voorbeeld

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E} &\rightarrow \mathrm{E} + \mathrm{E} \\
\mathrm{E} &\rightarrow \mathrm{E} \cdot \mathrm{E} \\
\mathrm{E} &\rightarrow x
\end{aligned}
$$

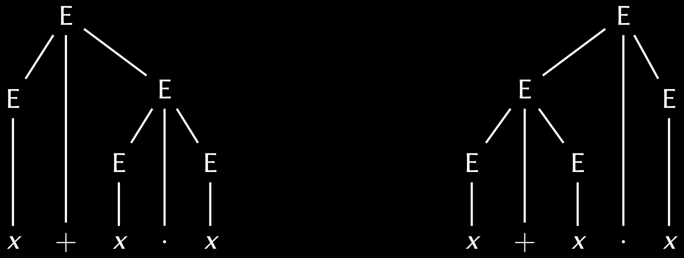
# Nog ’n voorbeeld

$$
\begin{aligned}
E &\rightarrow E + E \\
E &\rightarrow E \cdot E \\
E &\rightarrow x
\end{aligned}
$$



# Nog 'n voorbeeld

$$
\begin{aligned}
E &\rightarrow E + E \\
E &\rightarrow E \cdot E \\
E &\rightarrow x
\end{aligned}
$$



# Context-vrije taal

$$\mathcal{L}\left(\langle V, \Sigma, R, S \rangle\right) := \left\{ w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w \right\}$$

# Weer 'n voorbeeld

$$
\begin{array}{lcl}
F & \rightarrow & F + F \\
F & \rightarrow & E \\
E & \rightarrow & E \cdot E \\
E & \rightarrow & (\ F\ ) \\
E & \rightarrow & x
\end{array}
$$

# Weer 'n voorbeeld

$$
\begin{array}{lcl}
E & \rightarrow & E + E \\
E & \rightarrow & E \\
E & \rightarrow & E \cdot E \\
E & \rightarrow & (\ E\ ) \\
E & \rightarrow & x
\end{array}
$$

Elke reguliere taal is context-vrij

# Regulier is Context Vrij

Stel $\mathcal{L}$ is regulier. Dan is er een CFG G zodat $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$.

# Regulier is Context Vrij

Stel $\mathcal{L}$ is regulier. Dan is er een CFG G zodat $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$.

$\mathcal{L}(\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle)$

# Regulier is Context Vrij

Stel $\mathcal{L}$ is regulier. Dan is er een CFG G zodat $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$.

$\mathcal{L}(\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle)$

$$G = \langle \mathsf{V}, \Sigma, \mathsf{R}, \mathsf{S} \rangle$$

# Regulier is Context Vrij

Stel $\mathcal{L}$ is regulier. Dan is er een CFG G zodat $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$.

$\mathcal{L}(\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle)$

$$G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle, \quad V = Q$$

# Regulier is Context Vrij

Stel $\mathcal{L}$ is regulier. Dan is er een CFG G zodat $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$.

$\mathcal{L}(\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle)$

$$G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$$

$$V = Q$$

$$R = \{\, q \to x\,\delta(q,x) \mid x \in \Sigma \text{ en } q \in Q \,\} \cup \{\, q \to \varepsilon \mid q \in F \,\}$$

# Regulier is Context Vrij

Stel $\mathcal{L}$ is regulier. Dan is er een CFG G zodat $\mathcal{L} = \mathcal{L}(G)$.

$\mathcal{L}\left(\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle\right)$

$$G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$$

$$V = Q \qquad S = q_0$$

$$R = \{\, q \to x\, \delta(q, x) \mid x \in \Sigma \text{ en } q \in Q \,\} \cup \{\, q \to \varepsilon \mid q \in F \,\}$$

# Afsluitingseigenschappen

vereniging

# Afsluitingseigenschappen

vereniging

$S \to S_1 \mid S_2$

# Afsluitingseigenschappen

vereniging

$S \to S_1 \mid S_2$

concatenatie

# Afsluitingseigenschappen

vereniging

$$S \to S_1 \mid S_2$$

concatenatie

$$S \to S_1 \; S_2$$

# Afsluitingseigenschappen

vereniging

$S \to S_1 \mid S_2$

concatenatie

$S \to S_1 \; S_2$

ster

# Afsluitingseigenschappen

vereniging

$S \to S_1 \mid S_2$

concatenatie

$S \to S_1\ S_2$

ster

$S \to \epsilon \mid S_1\ S$

# Grammatica Transformaties

$G_1$ en $G_2$ equivalent indien $\mathcal{L}(G_1) = \mathcal{L}(G_2)$

# Nutteloze Symbolen

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & A\ B \mid b \\ A & \rightarrow & A \mid a \end{array}$$

# Nutteloze Symbolen

B produceert niks!

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A\ B \mid b \\ A &\rightarrow A \mid a \end{aligned}$$

# Nutteloze Symbolen

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & b \\
A & \rightarrow & A \mid a
\end{array}
$$

# Nutteloze Symbolen

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & \qquad b \\ A & \rightarrow & A \mid a \end{array}$$

A wordt nooit gebruikt!

# Nutteloze Symbolen

Zeg $x$ is nuttig als $S \overset{*}{\Rightarrow} uxv \overset{*}{\Rightarrow} w \in \Sigma^*$

---

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & \quad\quad b \\
  &             & \mid a
\end{array}
$$

# Nutteloze Symbolen

Zeg $x$ is nuttig als $S \overset{*}{\Rightarrow} uxv \overset{*}{\Rightarrow} w \in \Sigma^*$

---

B produceert niks!

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A\ B \mid b \\ A &\rightarrow A \mid a \end{aligned}$$

A wordt nooit gebruikt!

# Lege Regel

$A \rightarrow \varepsilon$ is leeg

# Lege Regel

$A \rightarrow \varepsilon$ is leeg

voor elke $B \rightarrow u\ A\ v$ voeg $B \rightarrow u\ v$ toe

# Lege Regel

$\mathrm{A} \rightarrow \varepsilon$ is leeg

voor elke $\mathrm{B} \rightarrow u\ \mathrm{A}\ v$ voeg $\mathrm{B} \rightarrow u\ v$ toe

---

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{S} & \rightarrow & b\ \mathrm{A} \\
\mathrm{A} & \rightarrow & \mathrm{A}\ \mathrm{A} \\
\mathrm{A} & \rightarrow & \varepsilon \\
\mathrm{A} & \rightarrow & a
\end{array}
$$

# Lege Regel

$A \rightarrow \varepsilon$ is leeg

voor elke $B \rightarrow u\ A\ v$ voeg $B \rightarrow u\ v$ toe

---

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & b\ A \\
A & \rightarrow & A\ A \\
A & \rightarrow & \varepsilon \\
A & \rightarrow & a
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & b\ A \mid b \\
A & \rightarrow & A\ A \mid A \mid A \\
A & \rightarrow & a
\end{array}
$$

# Lege Regel

$\mathsf{A} \rightarrow \varepsilon$ is leeg

voor elke $\mathsf{B} \rightarrow u\ \mathsf{A}\ v$ voeg $\mathsf{B} \rightarrow u\ v$ toe

---

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{S} & \rightarrow & b\ \mathsf{A} \\ \mathsf{A} & \rightarrow & \mathsf{A}\ \mathsf{A} \\ \mathsf{A} & \rightarrow & \varepsilon \\ \mathsf{A} & \rightarrow & a \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{S} & \rightarrow & b\ \mathsf{A} \mid b \\ \mathsf{A} & \rightarrow & A\ \mathsf{A} \mid \mathsf{A} \\ \mathsf{A} & \rightarrow & a \end{array}$$

# Voorbeeld

$$\begin{array}{lll} S & \rightarrow & S + S \\ S & \rightarrow & x \end{array}$$

# Voorbeeld

Verwijst naar zichzelf

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S + S \\ S &\rightarrow x \end{aligned}$$

# Voorbeeld

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S + S \\ S &\rightarrow x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow x \mid x\ Z \\ Z &\rightarrow +\ S \mid +\ S\ Z \end{aligned}$$

# Voorbeeld

$$S \rightarrow S + S$$
$$S \rightarrow x$$

$$S \rightarrow x \mid x\ Z$$
$$Z \rightarrow +\ S \mid +\ S\ Z$$

$$\begin{array}{ll} & S \\ \stackrel{*}{\Rightarrow} & x\ (+\ S)^n \end{array}$$

# Voorbeeld

$$\begin{array}{lll} S & \rightarrow & S + S \\ S & \rightarrow & x \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} S & \rightarrow & x \mid x\ Z \\ Z & \rightarrow & + S \mid + S\ Z \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & S \\ \stackrel{*}{\Rightarrow} & x\ (+\ S)^n \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & S \\ \Rightarrow & x\ Z \\ \Rightarrow & x\ (+\ S)\ Z \\ \stackrel{*}{\Rightarrow} & x\ (+\ S)^n \end{array}$$

# Links-recursieve Regel

wel

$$\begin{aligned} S &\rightarrow S\ w_1 \mid \ldots \mid\ w_n \\ S &\rightarrow v_1 \mid \ldots \mid v_m \end{aligned}$$

# Links-recursieve Regel

wel

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & S\ w_1 \mid \ldots \mid w_n \\ S & \rightarrow & v_1 \mid \ldots \mid v_m \end{array}$$

niet

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & v_1 \mid \ldots \mid v_n \\ S & \rightarrow & v_1\ Z \mid \ldots \mid v_m\ Z \\ Z & \rightarrow & w_1 \mid \ldots \mid w_n \\ Z & \rightarrow & w_1\ Z \mid \ldots \mid w_n\ Z \end{array}$$

# Substitutie

$$\begin{array}{lcl} \mathsf{A} & \rightarrow & u \; \mathsf{B} \; v \\ \mathsf{B} & \rightarrow & w_1 \mid \ldots \mid w_n \end{array}$$

# Substitutie

substitueer regels voor B

$$
\begin{array}{lcl}
\mathrm{A} & \rightarrow & u \ \mathrm{B} \ v \\
\mathrm{B} & \rightarrow & w_1 \mid \ldots \mid w_n
\end{array}
$$

# Substitutie

$$\begin{aligned} A &\rightarrow u\ B\ v \\ B &\rightarrow w_1 \mid \ldots \mid w_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &\rightarrow u\ w_1\ v \mid \ldots \mid u w_n v \\ B &\rightarrow w_1 \mid \ldots \mid w_n \end{aligned}$$

# Substitutie

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{A} & \rightarrow & u\ \mathrm{B}\ v \\ \mathrm{B} & \rightarrow & w_1 \mid \ldots \mid w_n \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \mathrm{A} & \rightarrow & u\ w_1\ v \mid \ldots \mid uw_nv \\ \mathrm{B} & \rightarrow & w_1 \mid \ldots \mid w_n \end{array}$$

---

Speciaal geval: enkele regels

vervang $A \rightarrow B$ door $A \rightarrow w_1 \mid \ldots \mid w_n$

# Chomsky Normaalvorm

Elke CFG past in Chomsky Normaalvorm

# Chomsky Normaalvorm

$\langle V, \Sigma, R, S \rangle$

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow B\ C & B, C \in V - S \\ A \rightarrow x & x \in \Sigma \\ S \rightarrow \varepsilon & \end{array}$$

Elke CFG past in Chomsky Normaalvorm

# Chomsky Normaalvorm

$A \rightarrow B\ C \quad B, C \in V - S$

$A \rightarrow x \quad x \in \Sigma$

$S \rightarrow \varepsilon$

$\langle V, \Sigma, R, S \rangle$

Elke CFG past in Chomsky Normaalvorm

verwijder lege regels → verwijder enkele regels → ontkoppel ketens

# Gezien

## Gesloten onder

vereniging, concatenatie, ster

## Transformaties

verwijderen lege, nutteloze,
links-recursieve & enkele regels

alles kan in Chomsky Normaalvorm

Volgende week: Greibach Normaalvorm