Logische Complexiteit

III : Myhill–Nerode

Jeroen Goudsmit
Universiteit Utrecht
dinsdag 14 februari 2012

Nogmaals Berekening

$$\Sigma^* \xrightarrow{\qquad\qquad\quad \delta^\bullet \quad\qquad\qquad} Q \to Q$$

Nogmaals Berekening

$$\Sigma^* \xrightarrow{\delta^\bullet} Q \to Q$$

$$wv \longmapsto \delta^\bullet(wv)$$

Nogmaals Berekening

$$\Sigma^* \xrightarrow{\delta^\bullet} Q \to Q$$

$$wv \longmapsto \delta^\bullet(wv) = \delta^\bullet(v)\delta^\bullet(w)$$

Nogmaals Berekening

$$\Sigma^* \xrightarrow{\quad\delta^\bullet\quad} Q \to Q$$

$$wv \longmapsto \delta^\bullet(wv) = \delta^\bullet(v)\delta^\bullet(w)$$

$$\varepsilon \longmapsto (\ q \mapsto q\ )$$

Monoïde

Definitie
Een monoïde is een tupel $\langle\, G, \oplus, e \,\rangle$ met:

$$\begin{array}{ll} G \quad \text{verzameling} & \\ \oplus : G \times G \to G & \text{operatie} \\ e \in G & \text{eenheid} \end{array}$$

zó dat $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ en $x \oplus e = x = e \oplus x$.

Monoïde

Definitie
Een monoïde is een tupel $\langle\, G, \oplus, e \,\rangle$ met:

$$\begin{array}{ll} G & \text{verzameling} \\ \oplus : G \times G \to G & \text{operatie} \\ e \in G & \text{eenheid} \end{array}$$

zó dat $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ en $x \oplus e = x = e \oplus x$.

Definitie
Een homomorfisme $f : G \to H$ voldoet aan:

$$f(x \oplus y) = f(x) \oplus f(y) \quad \text{en} \quad f(e) = e$$

Voorbeeld monoïde

$\langle \{0, 1\}, \oplus, 0 \rangle$

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Voorbeeld monoïde

$\langle \{0, 1, 2\}, \oplus, 0 \rangle$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Voorbeeld monoïde

$$G := \langle \{0, 1, 2\}, \oplus, 0 \rangle$$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$$\Sigma^* \longrightarrow G$$

Voorbeeld monoïde

$$G := \langle \{0, 1, 2\}, \oplus, 0 \rangle$$

$\oplus$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$$\Sigma^* \longrightarrow G$$

$$w_1 w_2 \ldots w_n \longmapsto e \oplus w_1 \oplus w_2 \oplus \ldots \oplus w_n$$

homomorfisme

$f : \Sigma^* \to \langle\, G, \oplus, e \rangle \supseteq S$

DFA

$\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$

homomorfisme

$f : \Sigma^* \to \langle\, G, \oplus, e \rangle \supseteq S$

DFA

$\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$

$$
\begin{aligned}
G &= Q \to Q \\
\oplus &= \text{voor} \\
e &= (q \mapsto q) \\
f &= \delta^{\bullet} \\
S &= \{ g \in G \mid g(q_0) \in F \}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} Q &= G \\ \delta(q, x) &= q \oplus f(x) \\ q_0 &= e \\ F &= S \end{aligned}$$

homomorfisme

$f : \Sigma^* \to \langle\, G, \oplus, e \rangle \supseteq S$

DFA

$\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$

$$\begin{aligned} G &= Q \to Q \\ \oplus &= \text{voor} \\ e &= (q \mapsto q) \\ f &= \delta^\bullet \\ S &= \{ g \in G \mid g(q_0) \in F \,\} \end{aligned}$$

Structuren bij DFA

DFA	homomorfisme
$\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$	$\delta^\bullet : \Sigma^* \to (Q \to Q) \supseteq S$

Structuren bij DFA

DFA	homomorfisme	partitie
$\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$	$\delta^\bullet : \Sigma^* \to (Q \to Q) \supseteq S$	

$w \approx v$ indien $\delta^\bullet(w)(\, q_0\,) = \delta^\bullet(v)(\, q_0\,)$

Structuren bij DFA

DFA	homomorfisme	partitie
$\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$	$\delta^\bullet : \Sigma^* \to (Q \to Q) \supseteq S$	

$w \approx v$ indien $\delta^\bullet(w)(\, q_0 \,) = \delta^\bullet(v)(\, q_0 \,)$

$\Sigma^*/\!\approx \; = \; \{$equivalentieklassen van $\approx\}$

Structuren bij DFA

DFA	homomorfisme	partitie
$\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$	$\delta^\bullet : \Sigma^* \to (Q \to Q) \supseteq S$	$\Sigma^*/\!\approx$

$w \approx v$ indien $\delta^\bullet(w)(\, q_0 \,) = \delta^\bullet(v)(\, q_0 \,)$

$\Sigma^*/\!\approx \;=\; \{\text{equivalentieklassen van } \approx\}$

Structuren bij DFA

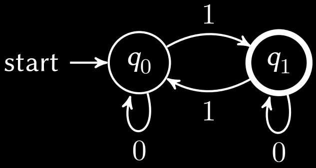
DFA	homomorfisme	partitie
$\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$	$\delta^\bullet : \Sigma^* \to (Q \to Q) \supseteq S$	$\Sigma^* / \approx$

hoogstens zo groot als Q

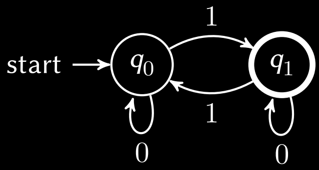
$$w \approx v \text{ indien } \delta^\bullet(w)(\, q_0 \,) = \delta^\bullet(v)(\, q_0 \,)$$

$$\Sigma^* / \approx \;=\; \{\text{equivalentieklassen van } \approx\}$$

Voorbeeld



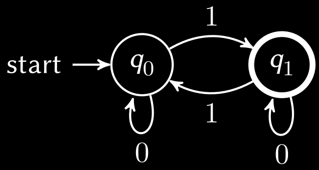
Voorbeeld



toestand q_0

toestand q_1

Voorbeeld

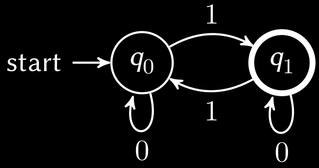


toestand q_0

toestand q_1

ε

Voorbeeld

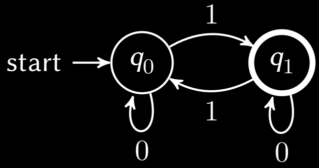


toestand q_0

toestand q_1

ε, 0

Voorbeeld



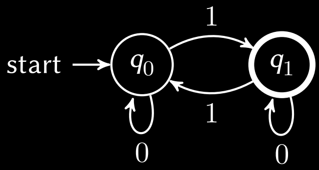
toestand q_0

ε, 0

toestand q_1

1

Voorbeeld



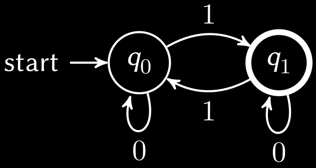
toestand q_0

ε, 0

toestand q_1

1, 10

Voorbeeld



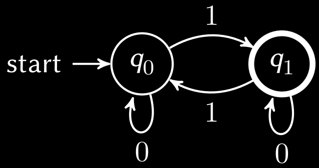
toestand q_0

ε, 0, 101

toestand q_1

1, 10

Voorbeeld



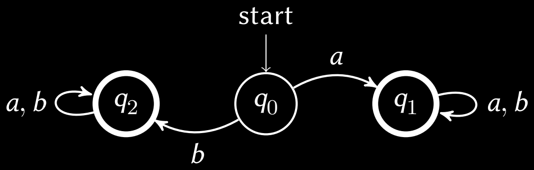
toestand q_0

$w \in \Sigma^*$ met een even aantal 1'en

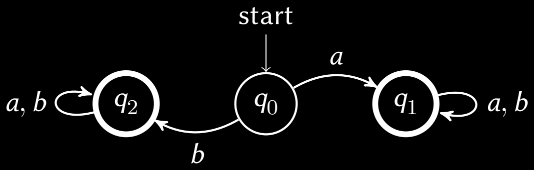
toestand q_1

$w \in \Sigma^*$ met een oneven aantal 1'en

Nog 'n voorbeeld

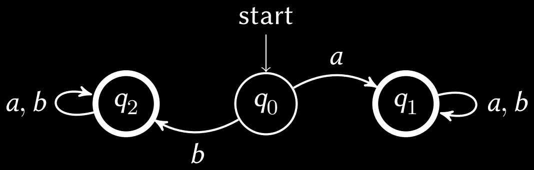


Nog 'n voorbeeld



toestand q_0 toestand q_1 toestand q_2

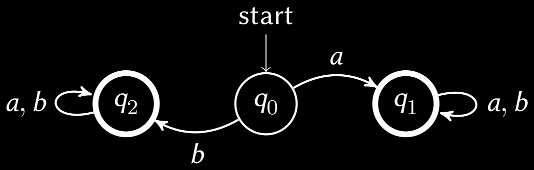
Nog 'n voorbeeld



toestand q_0 | toestand q_1 | toestand q_2

ε

Nog 'n voorbeeld

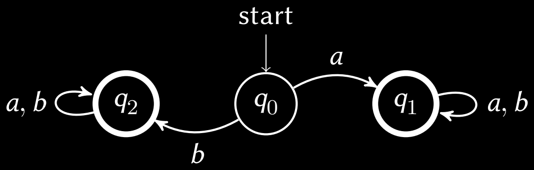


toestand q_0 | toestand q_1 | toestand q_2

ε

a

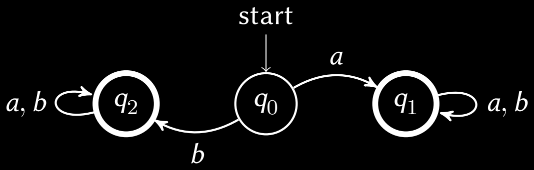
Nog 'n voorbeeld



toestand q_0 | toestand q_1 | toestand q_2

ε | a | b

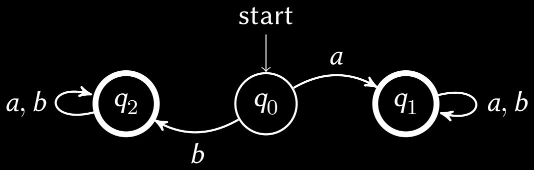
Nog 'n voorbeeld



toestand q_0 | toestand q_1 | toestand q_2

ε | a, ab, aa, ... | b

Nog 'n voorbeeld



toestand q_0

toestand q_1

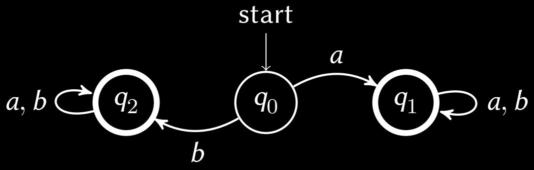
toestand q_2

ε

a, ab, aa, ...

b,ba, bb, ...

Nog 'n voorbeeld



toestand q_0	toestand q_1	toestand q_2
ε	aw voor alle $w \in \Sigma^*$	bw voor alle $w \in \Sigma^*$

DFA bij taal

Taal	Partitie
$\mathcal{L}$	

DFA bij taal

Taal

Partitie

$\mathcal{L}$

$u \equiv v$ wanneer $\forall w \in \Sigma^*$ geldt $uw \in \mathcal{L} \Leftrightarrow vw \in \mathcal{L}$

DFA bij taal

Taal	Partitie
$\mathcal{L}$	$\Sigma^*/\equiv$

$$u \equiv v \quad \text{wanneer} \quad \forall w \in \Sigma^* \text{ geldt } uw \in \mathcal{L} \Leftrightarrow vw \in \mathcal{L}$$

DFA bij taal

Taal	Partitie
$\mathcal{L}$	$\Sigma^*/\equiv$

$$u \approx v \quad \Rightarrow \quad u \equiv v$$

$$u \equiv v \quad \text{wanneer} \quad \forall w \in \Sigma^* \text{ geldt } uw \in \mathcal{L} \Leftrightarrow vw \in \mathcal{L}$$

DFA bij taal

Taal	Partitie
$\mathcal{L}$	$\Sigma^*/\equiv$

$u \equiv v$ wanneer $\forall w \in \Sigma^*$ geldt $uw \in \mathcal{L} \Leftrightarrow vw \in \mathcal{L}$

Als $\Sigma^*/\equiv$ eindig, dan is $\langle\, \Sigma^*/\equiv, \Sigma, \delta, \epsilon, F \,\rangle$ een DFA

DFA bij taal

Taal	Partitie
$\mathcal{L}$	$\Sigma^*/\equiv$

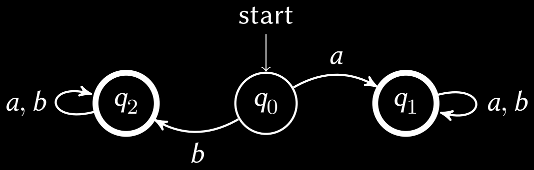
$$u \equiv v \quad \text{wanneer} \quad \forall w \in \Sigma^* \text{ geldt } uw \in \mathcal{L} \Leftrightarrow vw \in \mathcal{L}$$

Als $\Sigma^*/\equiv$ eindig, dan is $\langle\, \Sigma^*/\equiv, \Sigma, \delta, \epsilon, F \,\rangle$ een DFA

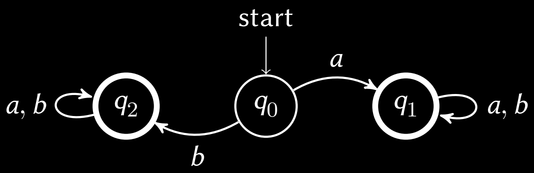
$$F = \mathcal{L}/\equiv$$

$$\delta : (\Sigma^*/\equiv) \times \Sigma \to (\Sigma^*/\equiv)\,, \quad \langle\, w/\equiv, x\rangle \mapsto wx/\equiv$$

The Voorbeeld Returns

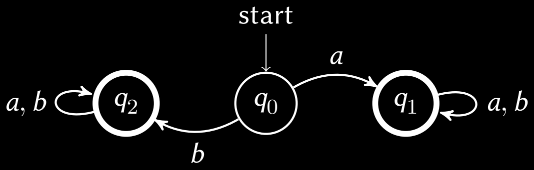


The Voorbeeld Returns



toestand q_0	toestand q_1	toestand q_2
ε	aw voor alle $w \in \Sigma^*$	bw voor alle $w \in \Sigma^*$

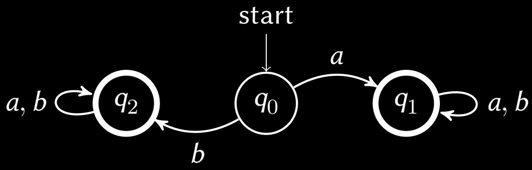
The Voorbeeld Returns



toestand q_0	toestand q_1	toestand q_2
ε	aw voor alle $w \in \Sigma^*$	bw voor alle $w \in \Sigma^*$

$a \equiv b \qquad \epsilon \not\equiv a, \quad aw \equiv bw$ voor $w \in \Sigma^*$

The Voorbeeld Returns



toestand q_0	toestand q_1	toestand q_2
ε	aw voor alle $w \in \Sigma^*$	bw voor alle $w \in \Sigma^*$

$a \equiv b \qquad \epsilon \not\equiv a, \quad aw \equiv bw$ voor $w \in \Sigma^*$

$$\Sigma^*/{\equiv} = \Big\{\{\varepsilon\}, \{a, b, aa, ab, ba, bb, \ldots\}\Big\}$$

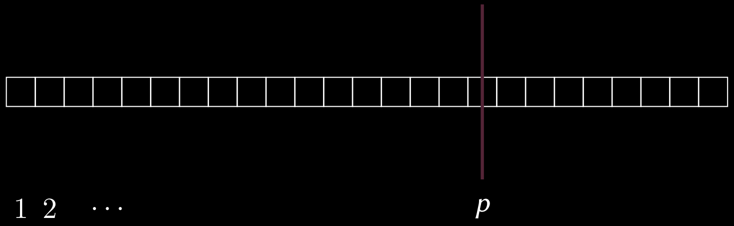
Myhill–Nerode

$$\mathcal{L} \text{ is regulier} \iff \Sigma^*/\equiv_L \text{ is eindig}$$

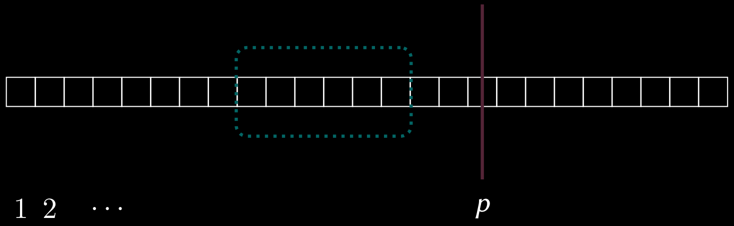
Pomplengte

$1 \;\; 2 \quad \cdots$

Pomplengte



Pomplengte



Pomplengte

$\mathcal{L}$ heeft pomplengte p als voor alle $w \in \mathcal{L}$ met $|w| \geq p$ er $x, y, z \in \Sigma^*$ zijn met:

1. $xyz = w$;
2. $|xy| \leq p$;
3. $|y| \geq 1$
4. $xy^iz \in \mathcal{L}$ voor alle $i \in \mathbb{N}$.

Gezien

Reguliere Taal

Gezien

Reguliere Taal

Eindig Homomorfisme

$$\Sigma^* \to G \supseteq S$$

Gezien

Reguliere Taal

Eindig Homomorfisme

$\Sigma^* \to G \supseteq S$

Eindige Partitie

$\Sigma^* / \equiv$

Gezien

Reguliere Taal

Eindig Homomorfisme
$\Sigma^* \to G \supseteq S$

Eindige Partitie
$\Sigma^* / \equiv$

Pomplengte