Logische Complexiteit

II : Reguliere Talen

Jeroen Goudsmit
Universiteit Utrecht
donderdag 9 februari 2012

Berekening

DFA $\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$

Berekening

DFA $\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$

$$\delta \quad : Q \times \Sigma \to Q$$

Berekening

DFA $\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$

$$\delta \quad : \Sigma \to (Q \to Q)$$

Berekening

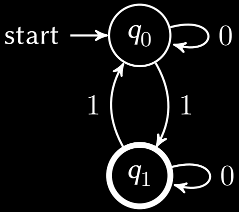
DFA $\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$

$: \Sigma \to (Q \to Q)$

Berekening

DFA $\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$

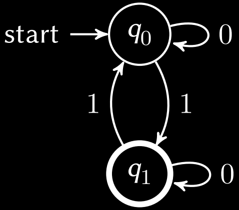
 $: \Sigma \to (Q \to Q)$



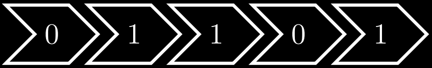
Berekening

DFA $\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$

$: \Sigma \to (Q \to Q)$



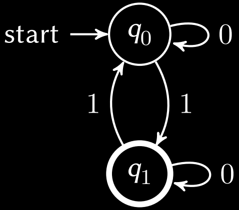
01101 geeft



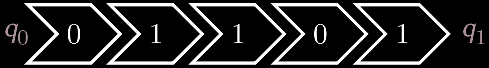
Berekening

DFA $\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$

$: \Sigma \to (Q \to Q)$



01101 geeft



Determinisme

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q$$

$$\delta(\delta(x, a), y)$$

Determinisme

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q$$

$$\delta(\delta(x, a), y)$$

Determinisme

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q$$

$$\delta(\delta(x, a), y)$$

Nondeterminisme

$$\delta : Q \times \Sigma \to \mathbf{P}\,(Q)$$

$$\bigcup_{q \in \delta(a,x)} \delta(q, y)$$

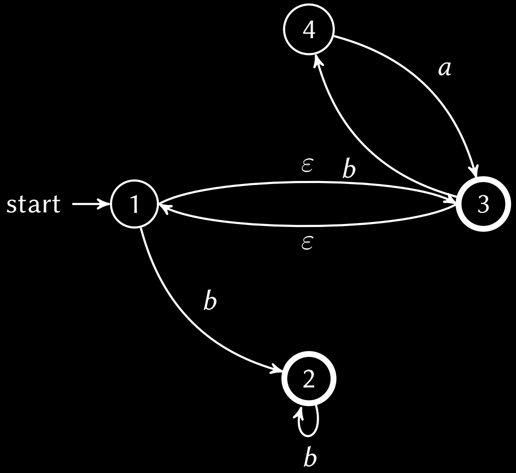
Half-NFA

Definitie

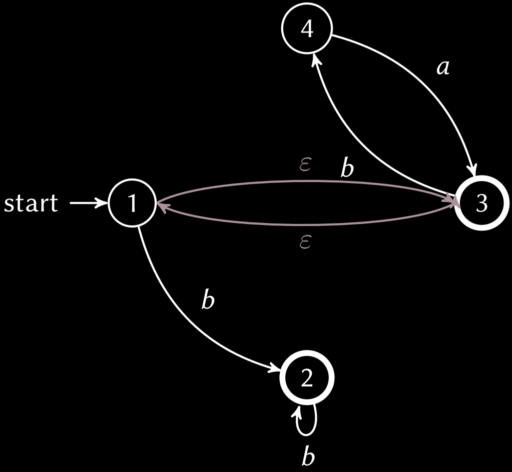
Een half-NFA is een tupel $\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$ met:

Q	eindige verzameling	toestanden
Σ	eindige verzameling	alfabet
$\delta : Q \times \Sigma \to \mathbf{P}\,(Q)$		transitiefunctie
$q_0 \in Q$		begintoestand
$F \subseteq Q$		eindtoestanden

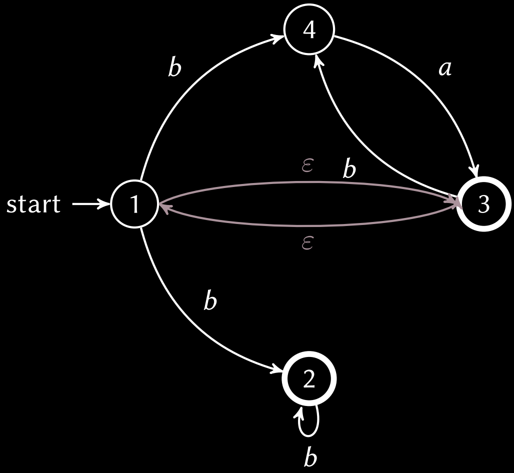
Verwijderen ε-pijlen



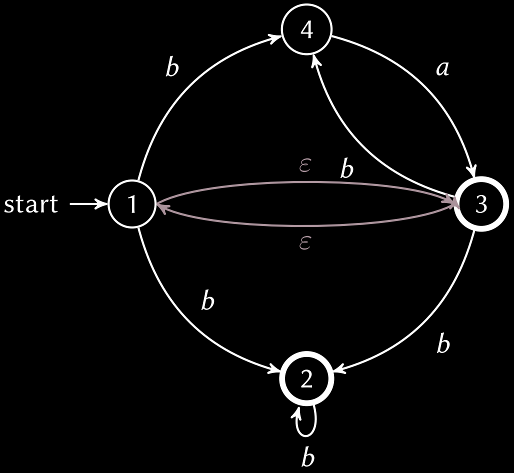
Verwijderen ε-pijlen



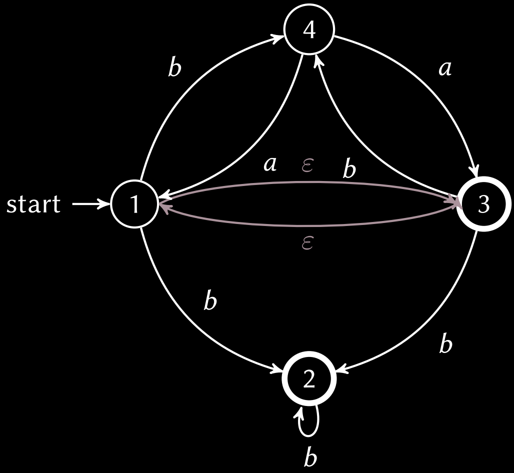
Verwijderen ε-pijlen



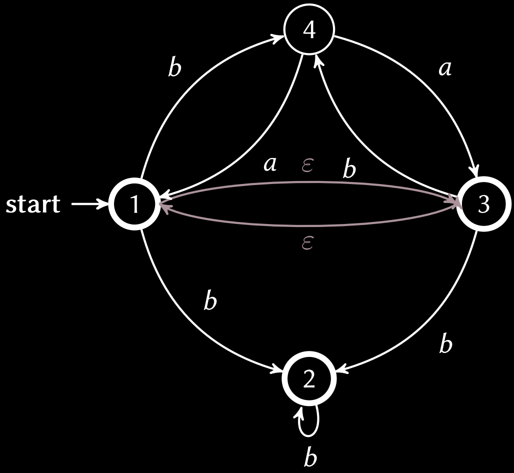
Verwijderen ε-pijlen



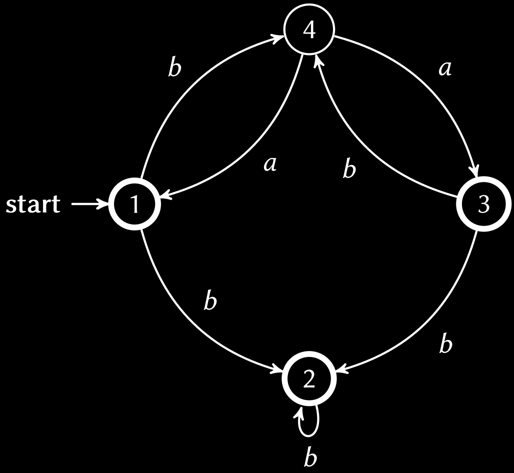
Verwijderen ε-pijlen



Verwijderen ε-pijlen



Verwijderen ε-pijlen



Lege woorden

half-NFA M

Lege woorden

$\langle\, Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F \,\rangle$

half-NFA M

Lege woorden

$\langle\, Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F \,\rangle$

half-NFA M

$T \subseteq Q$ heet ε-gesloten als $\delta(q, \varepsilon) \subseteq T$ voor alle $q \in T$

Lege woorden

$\langle\, Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F \,\rangle$

half-NFA M

$T \subseteq Q$ heet ε-gesloten als $\delta(q, \varepsilon) \subseteq T$ voor alle $q \in T$

$$\mathrm{E}\, S := \bigcap \{\, T \subseteq Q \mid S \subseteq T \text{ is } \varepsilon\text{-gesloten} \,\}$$

Lege woorden

$\langle\, Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F \,\rangle$

half-NFA M

$\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, \mathrm{E}\, F \,\rangle$

half-NFA $\underline{M}$

$T \subseteq Q$ heet ε-gesloten als $\delta(q, \varepsilon) \subseteq T$ voor alle $q \in T$

$$\mathrm{E}\, S := \bigcap \{\, T \subseteq Q \mid S \subseteq T \text{ is } \varepsilon\text{-gesloten} \,\}$$

Lege woorden

$\langle\, Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F \,\rangle$

half-NFA M

$\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, \mathrm{E}\, F \,\rangle$

half-NFA $\underline{M}$

$T \subseteq Q$ heet ε-gesloten als $\delta(q, \varepsilon) \subseteq T$ voor alle $q \in T$

$$\mathrm{E}\, S := \bigcap \{\, T \subseteq Q \mid S \subseteq T \text{ is } \varepsilon\text{-gesloten} \,\}$$

$$\delta : Q \times \Sigma \to \mathbf{P}\,(\Sigma\,)\,, \quad \langle q, x \rangle \mapsto \bigcup \mathrm{E}\,\{\delta(t, x) \mid t \in \mathrm{E}\,\{q\}\}$$

Lege woorden

$\langle\, Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F\, \rangle$

half-NFA M

$\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, \mathrm{E}\, F\, \rangle$

half-NFA $\underline{M}$

$$w \in \mathcal{L}\,(\,\underline{M}\,) \Leftrightarrow \exists v \in \mathcal{L}\,(\,M\,) \text{ met } w = (v_i \mid v_i \neq \epsilon)$$

$T \subseteq Q$ heet ε-gesloten als $\delta(q, \varepsilon) \subseteq T$ voor alle $q \in T$

$$\mathrm{E}\, S := \bigcap \{ T \subseteq Q \mid S \subseteq T \text{ is } \varepsilon\text{-gesloten} \}$$

$$\delta : Q \times \Sigma \to \mathbf{P}\,(\Sigma\,), \quad \langle q, x\rangle \mapsto \bigcup \mathrm{E}\,\{\delta(t, x) \mid t \in \mathrm{E}\,\{q\}\}$$

NFA

Definitie

Een NFA is een tupel $\langle\, Q, \Sigma, \delta, q_0, F \,\rangle$ met:

Q	eindige verzameling	toestanden
Σ	eindige verzameling	alfabet
$\delta : Q \times \Sigma_\varepsilon \to \mathbf{P}\,(Q)$		transitiefunctie
$q_0 \in Q$		begintoestand
$F \subseteq Q$		eindtoestanden

Berekening

M accepteert $w \in \Sigma^*$ wanneer ...

Berekening

$\langle\, Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F \,\rangle$

M accepteert $w \in \Sigma^*$ wanneer $\exists v \in \Sigma_\varepsilon^*$ met $w = v_1 \ldots v_n$ en

Berekening

$\langle\, Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F \,\rangle$

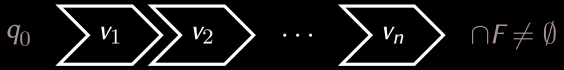
M accepteert $w \in \Sigma^*$ wanneer $\exists v \in \Sigma_\varepsilon^*$ met $w = v_1 \ldots v_n$ en

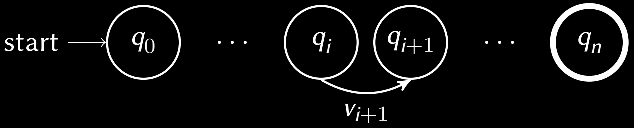
$$q_0 \quad v_1 \; v_2 \quad \cdots \quad v_n \quad \cap F \neq \emptyset$$

Berekening

$\langle\, Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F \,\rangle$

M accepteert $w \in \Sigma^*$ wanneer $\exists v \in \Sigma_\varepsilon^*$ met $w = v_1 \dots v_n$ en





DFA naar NFA

Voor elke DFA M is er een NFA N met $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$

NFA naar DFA

Voor elke NFA M is er een DFA N met $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$

NFA naar DFA

$\langle\, Q, \Sigma_\varepsilon, \delta, q_0, F \,\rangle$

Voor elke NFA M is er een DFA N met $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$

NFA naar DFA

$\langle\, Q, \Sigma \ \ , \delta, q_0, F \,\rangle$

Voor elke NFA M is er een DFA N met $\mathcal{L}\,(\,M\,) = \mathcal{L}\,(\,N\,)$

NFA naar DFA

$\langle \mathbf{P}(Q), \Sigma, \delta, \{q_0\}, F \rangle$

$\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

Voor elke NFA M is er een DFA N met $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$

NFA naar DFA

$\langle \mathbf{P}(Q), \Sigma, \delta, \{q_0\}, F \rangle$

$\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

Voor elke NFA M is er een DFA N met $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$

$$\delta : \mathbf{P}(Q) \times \Sigma \rightarrow \mathbf{P}(Q)$$

NFA naar DFA

$\langle \mathbf{P}(Q), \Sigma, \delta, \{q_0\}, F \rangle$

$\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

Voor elke NFA M is er een DFA N met $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$

$$\delta : \mathbf{P}(Q) \times \Sigma \to \mathbf{P}(Q), \quad \langle S, x \rangle \mapsto \bigcup_{q \in S} \delta(q, x)$$

NFA naar DFA

$\langle \mathbf{P}(Q), \Sigma, \delta, \{q_0\}, F \rangle$

$\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$

Voor elke NFA M is er een DFA N met $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$

$$\delta : \mathbf{P}(Q) \times \Sigma \to \mathbf{P}(Q), \quad \langle S, x \rangle \mapsto \bigcup_{q \in S} \delta(q, x)$$

$$F := \left\{ S \subseteq Q \;\middle|\; S \text{ doorsnijdt } F \right\}$$

Concatenatie

Zijn $\mathcal{L}_1$ en $\mathcal{L}_2$ regulier, dan is $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ het ook.

Concatenatie

Zijn $\mathcal{L}_1$ en $\mathcal{L}_2$ regulier, dan is $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2$ het ook.

$\{ wv \mid w \in \mathcal{L}_1 \text{ en } v \in \mathcal{L}_2 \}$

Herhalingen

Is $\mathcal{L}$ regulier, dan is $\mathcal{L}^*$ het ook.

Herhalingen

Is $\mathcal{L}$ regulier, dan is $\mathcal{L}^*$ het ook.

$\{ w_1 \ldots w_n \mid w_1, \ldots, w_n \in \mathcal{L} \}$

Afsluitingseigenschappen

Afsluitingseigenschappen

$\mathbf{reg}\,\{x\}$ voor $x \in \Sigma$ $\qquad$ $\mathbf{reg}\,\{\varepsilon\}$ $\qquad$ $\mathbf{reg}\,\emptyset$

Afsluitingseigenschappen

$\mathbf{reg}\,\{x\}$ voor $x \in \Sigma$

$\mathbf{reg}\,\{\varepsilon\}$

$\mathbf{reg}\,\emptyset$

$$\frac{\mathbf{reg}\,L_1 \qquad \mathbf{reg}\,L_2}{\mathbf{reg}\,\left(L_1 \cup L_2\right)}$$

$$\frac{\mathbf{reg}\,L_1 \qquad \mathbf{reg}\,L_2}{\mathbf{reg}\,\left(L_1 \circ L_2\right)}$$

$$\frac{\mathbf{reg}\,L}{\mathbf{reg}\,L^*}$$

L is regulier precies als $\mathbf{reg}\,L$

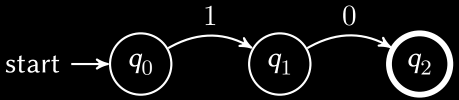
Reguliere Expressie

$$\mathbf{R} ::= \Sigma \mid \varepsilon \mid \emptyset \mid \mathbf{R} \cup \mathbf{R} \mid \mathbf{R}\,\mathbf{R} \mid \mathbf{R}^*$$

Voorbeelden

$\mathcal{L}(10\ )$

Voorbeelden

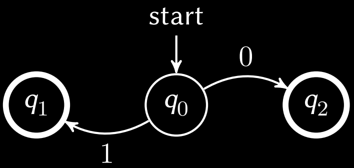
$\mathcal{L}(10) = \mathcal{L}\Bigg($  $\Bigg)$

Voorbeelden

$\mathcal{L}(0 \cup 1)$

Voorbeelden

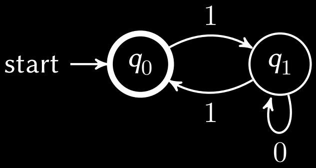
$\mathcal{L}\,(0 \cup 1\ ) = \mathcal{L}\,\Bigg($



$\Bigg)$

Voorbeelden

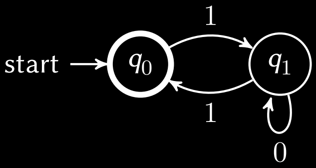
$$\mathcal{L}\Big((11 \cup 0)^*\Big) = \mathcal{L}\Bigg($$



$$\Bigg)$$

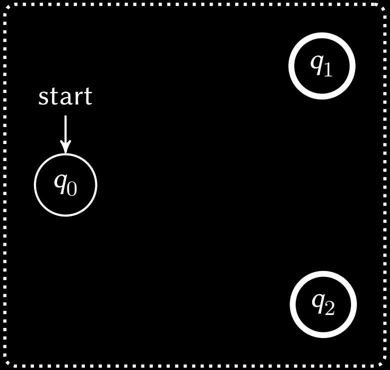
Voorbeelden

$\mathcal{L}\left((11 \cup 0)^*\right) = \mathcal{L}\Big($

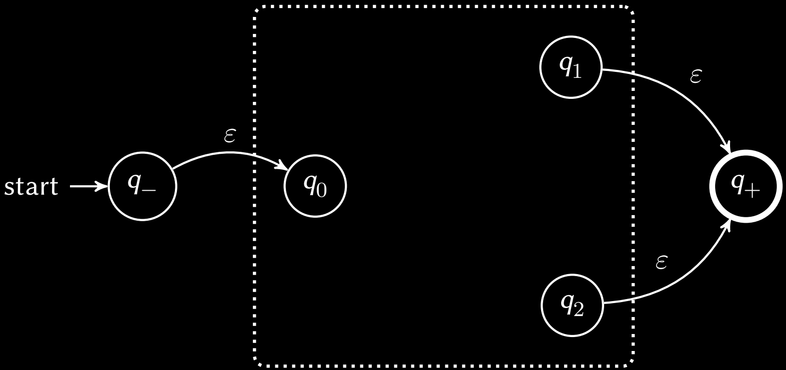


$\Big)$

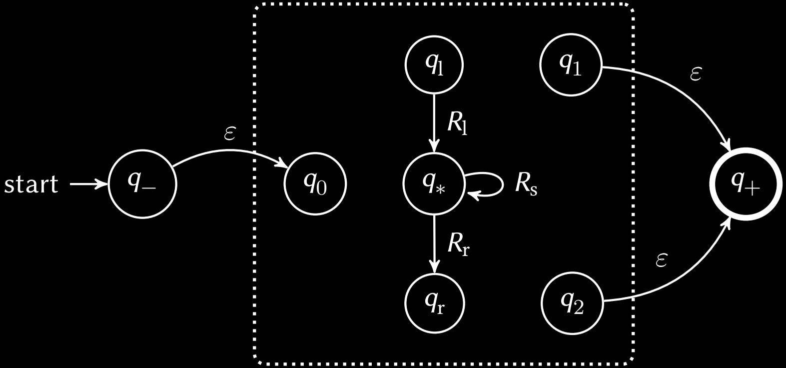
Reguliere Expressie bij NFA



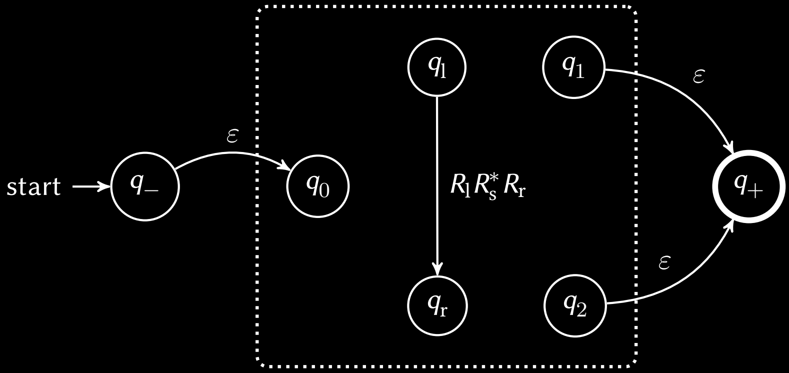
Reguliere Expressie bij NFA



Reguliere Expressie bij NFA



Reguliere Expressie bij NFA



Gezien

DFA
deterministisch

Gezien

DFA
deterministisch

NFA
non-deterministisch

Gezien

DFA
determinististisch

NFA
non-deterministisch
ε-pijlen maken niks uit

Gezien

Reguliere Expressie

DFA	NFA
deterministisch	non-deterministisch
	ε-pijlen maken niks uit

Gezien

Reguliere Expressie

DFA
deterministisch

NFA
non-deterministisch
ε-pijlen maken niks uit

gesloten onder: doorsnede, vereniging, concatenatie, herhaling

Gezien

Reguliere Expressie

DFA
deterministisch

NFA
non-deterministisch
ε-pijlen maken niks uit

gesloten onder: doorsnede, vereniging, concatenatie, herhaling

oefenen: opgaven 14b, 15 – 19, 21