Logische Complexiteit

XV : Stelling van Savitch

Jeroen Goudsmit
Universiteit Utrecht
donderdag 29 maart 2012

Clique

$$\text{Clique} := \left\{ \langle G \rangle\, k \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ een ongerichte graaf} \\ \text{met een } k\text{-clique} \end{array} \right\}$$

VertexCover

$$\text{VertexCover} := \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ een ongerichte graaf} \\ \text{met } k \text{ knopen } W \text{ die} \\ \text{alle lijnen raken} \end{array} \right\}$$

HamPath

$$\text{HamPath} := \left\{ \langle G, s, t \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ een gerichte graaf} \\ \text{met knopen } s \text{ en } t \\ \text{verbonden door 'n pad} \\ \text{dat alle knopen raakt} \end{array} \right\}$$

SubsetSum

$$\text{SubsetSum} := \left\{ \langle S, k \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} S \text{ 'n rijtje over } \mathbb{N} \\ \text{met deelrij die} \\ \text{opsomt tot } k \end{array} \right\}$$

Ruimtecomplexiteit

Definitie
De ruimtecomplexiteit van een TM M die stopt op alle invoer is gegeven als de functie :

$$n \in \mathbb{N} \;\mapsto\; \max \left\{ \begin{array}{c} \text{maximum aantal} \\ \text{cellen wat } M \text{ gebruikt} \\ \text{op invoer } w \end{array} \;\middle|\; w \in \Sigma^* \text{ en } |w| = n \right\}$$

$$\left(\left(A \to B \right) \to A \right) \to A$$

$$\left(\left(\boxed{A} \to \boxed{B}\right) \to \boxed{A}\right) \to \boxed{A}$$

$$\left(\left(\boxed{A \to B}\right) \to \boxed{A}\right) \to \boxed{A}$$

$$\left(\boxed{\left(A \to B \right) \to A} \right) \to \boxed{A}$$

$$\left(\left(A \to B\right) \to A\right) \to A$$

$$\left(\left(A \to B \right) \to A \right) \to A$$

$$\left(\left(\boxed{A \to B}\right) \to \boxed{A}\right) \to \boxed{A}$$

$$\left(\boxed{\left(A \to B\right) \to A}\right) \to \boxed{A}$$

$$\left(\left(A \to B\right) \to A\right) \to A$$

$$((A \to B) \to A) \to A$$

$$\left(\left(\boxed{A \to B} \right) \to \boxed{A} \right) \to \boxed{A}$$

$$\left(\left(A \to B \right) \to A \right) \to A$$

$$\left(\left(A \to B\right) \to A\right) \to A$$

$$\left(\left(\boxed{A} \to \boxed{B}\right) \to \boxed{A}\right) \to \boxed{A}$$

$$((A \to B) \to A) \to A$$

$$\left(\boxed{\left(A \to B\right) \to A}\right) \to \boxed{A}$$

$$\Big(\big(A \to B\big) \to A\Big) \to A$$

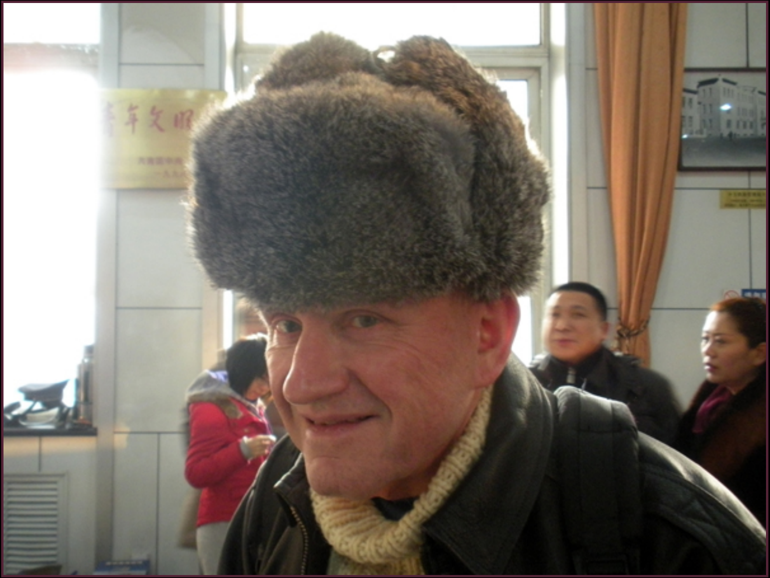
$$\mathrm{Time}\,(f) \subseteq \mathrm{Space}\,(f)$$

Ruimtecomplexiteit

Definitie
De ruimtecomplexiteit van een non-determinisitische TM M waarbij elke branch op alle invoer stopt is gegeven als de functie:

$$n \in \mathbb{N} \mapsto \max \left\{ \begin{array}{c} \text{maximum aantal} \\ \text{cellen wat } M \text{ gebruikt} \\ \text{op invoer } w \text{ voor} \\ \text{welke branch dan ook} \end{array} \;\middle|\; w \in \Sigma^* \text{ en } |w| = n \right\}$$

$$\mathrm{NTime}\,(f) \subseteq \mathrm{NSpace}\,(f)$$



Walter John Savitch

Stelling van Savitch

$$\mathrm{NSpace}\left(f\right) \subseteq \mathrm{Space}\left(f^2\right)$$

Observatie

Er zijn maar exponentieel veel stappen die je in een beperkte ruimte kan nemen.

Observatie

Er zijn “maar” exponentieel veel stappen die je in een beperkte ruimte kan nemen.

Bereikbaarheid

Neem een non-deterministische TM M.

Bereikbaarheid

ruimtecomplexiteit $O(f)$

Neem een non-deterministische TM M.

Bereikbaarheid

ruimtecomplexiteit $O(f)$

Neem een non-deterministische TM M. Iedere branch kost dus hooguit $2^{O(f)}$ tijd.

Bereikbaarheid

ruimtecomplexiteit $O(\, f\,)$

Neem een non-deterministische TM M. Iedere branch kost dus hooguit $2^{O(\, f\,)}$ tijd.

BEREIKBAAR := "Op invoer $\langle\, x, z, k\,\rangle$:

1. Als $k = 1$, accepteer als x in één stap naar y kan, verwerp anders.
2. Voor elke configuratie y van grootte hooguit m:

2a. Test of $\left\langle\, x, y, \frac{m}{2}\,\right\rangle \in$ BEREIKBAAR;

2b. Test of $\left\langle\, y, z, \frac{m}{2}\,\right\rangle \in$ BEREIKBAAR;

2c. Indien beide tests slagen, accepteer."

Berekening zoeken

De TM M accepteert w precies als er een pad van lengte hooguit $2^{f(|w|)}$ is tussen begin- en eindtoestand.

Berekening zoeken

De TM M accepteert w precies als er een pad van lengte hooguit $2^{f(|w|)}$ is tussen begin- en eindtoestand.

Zo'n pad vindt je in $O\left(f(|w|)^2 \right)$ ruimte.

Ruimtecomplexiteitsklassen

Ruimtecomplexiteitsklassen

$$\mathrm{PSPACE} := \bigcup_k \mathrm{Space}\left(\ n^k\ \right)$$

Ruimtecomplexiteitsklassen

$$\mathrm{PSPACE} := \bigcup_k \mathrm{Space}\left(\; n^k \;\right) \qquad \mathrm{NPSPACE} := \bigcup_k \mathrm{NSpace}\left(\; n^k \;\right)$$

Gekwantificeerde Formules

$$\mathrm{TQBF} := \left\{ \langle \phi \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi \text{ is een ware} \\ \text{volledig gekwantificeerde} \\ \text{propositionele formule} \end{array} \right\}$$

PSPACE-volledig

Een taal $\mathcal{L}$ heet PSPACE-volledig als ze in PSPACE zit, en voor alle talen $A \in \text{PSPACE}$ geldt $A \leq_{\text{p}} \mathcal{L}$.

TQBF is PSPACE-volledig

Gezien

Ruimtecomplexiteit

Gezien

Ruimtecomplexiteit

PSPACE

NPSPACE

Gezien

Ruimtecomplexiteit

PSPACE NPSPACE

TQBF is PSPACE-volledig