



Logische Complexiteit

XII : Complexiteit

Jeroen Goudsmit
Universiteit Utrecht
dinsdag 20 maart 2012

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} lexicografisch opgesomd wordt, dan is \mathcal{L} beslisbaar.

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} lexicografisch opgesomd wordt, dan is \mathcal{L} beslisbaar.

Bewijs.

M opsommer, print in lexicografische volgorde

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} lexicografisch opgesomd wordt, dan is \mathcal{L} beslisbaar.

Bewijs.

Maak een beslisser N
als volgt.

$N =$ “Op invoer w :

1. Simuleer M . Voor elk geprint woord v :
2. Als $v = w$, **accepteer**.
3. Als $v > w$, **verwerp**.

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} lexicografisch opgesomd wordt, dan is \mathcal{L} beslisbaar.

Bewijs.

Maak een beslisser N
als volgt.

Zeg M print woorden v_1, v_2, \dots

$N =$ "Op invoer w :

1. Simuleer M . Voor elk geprint woord v :
2. Als $v = w$, **accepteer**.
3. Als $v > w$, **verwerp**.
4. Als $v < w$, wacht.

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} lexicografisch opgesomd wordt, dan is \mathcal{L} beslisbaar.

Bewijs.

Maak een beslisser N
als volgt.

Zeg M print woorden v_1, v_2, \dots . Merk
op dat $v_i < v_j$ als $i < j$.

$N =$ “Op invoer w :

1. Simuleer M . Voor elk
geprint woord v :
2. Als $v = w$, **accepteer**.
3. Als $v > w$, **verwerp**.
4. Als $v < w$, wacht.

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} lexicografisch opgesomd wordt, dan is \mathcal{L} beslisbaar.

Bewijs.

Maak een beslisser N als volgt.

$N =$ “Op invoer w :

1. Simuleer M . Voor elk geprint woord v :
2. Als $v = w$, **accepteer**.
3. Als $v > w$, **verwerp**.
4. Als $v < w$, wacht.

Zeg M print woorden v_1, v_2, \dots . Merk op dat $v_i < v_j$ als $i < j$.

Stel $w \in \mathcal{L}$, dan volgt dat $v_n = w$ voor een $n \in \mathbb{N}$. Dus N wacht n stappen, ziet w en **accepteert**.

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} lexicografisch opgesomd wordt, dan is \mathcal{L} beslisbaar.

Bewijs.

Maak een beslisser N als volgt.

$N =$ “Op invoer w :

1. Simuleer M . Voor elk geprint woord v :
2. Als $v = w$, **accepteer**.
3. Als $v > w$, **verwerp**.
4. Als $v < w$, wacht.

Zeg M print woorden v_1, v_2, \dots . Merk op dat $v_i < v_j$ als $i < j$.

Stel $w \in \mathcal{L}$, dan volgt dat $v_n = w$ voor een $n \in \mathbb{N}$. Dus N wacht n stappen, ziet w en **accepteert**.

Als $w \notin \mathcal{L}$, dan print M het woord w nooit.

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} lexicografisch opgesomd wordt, dan is \mathcal{L} beslisbaar.

Bewijs.

Maak een beslisser N als volgt.

$N =$ “Op invoer w :

1. Simuleer M . Voor elk geprint woord v :
2. Als $v = w$, **accepteer**.
3. Als $v > w$, **verwerp**.
4. Als $v < w$, wacht.

Zeg M print woorden v_1, v_2, \dots . Merk op dat $v_i < v_j$ als $i < j$.

Stel $w \in \mathcal{L}$, dan volgt dat $v_n = w$ voor een $n \in \mathbb{N}$. Dus N wacht n stappen, ziet w en **accepteert**.

Als $w \notin \mathcal{L}$, dan print M het woord w nooit. Maar er zijn maar eindig veel woorden kleiner dan w .

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} lexicografisch opgesomd wordt, dan is \mathcal{L} beslisbaar.

Bewijs.

Maak een beslisser N als volgt.

$N =$ “Op invoer w :

1. Simuleer M . Voor elk geprint woord v :
2. Als $v = w$, **accepteer**.
3. Als $v > w$, **verwerp**.
4. Als $v < w$, wacht.

Zeg M print woorden v_1, v_2, \dots . Merk op dat $v_i < v_j$ als $i < j$.

Stel $w \in \mathcal{L}$, dan volgt dat $v_n = w$ voor een $n \in \mathbb{N}$. Dus N wacht n stappen, ziet w en **accepteert**.

Als $w \notin \mathcal{L}$, dan print M het woord w nooit. Maar er zijn maar eindig veel woorden kleiner dan w . Dus na eindig veel stappen print M een woord $v > w$, en N **verwerpt** dan. ■

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} beslisbaar is, dan is er een lexicografische opsommer.

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} beslisbaar is, dan is er een lexicografische opsommer.

Bewijs.

M beslisser

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} beslisbaar is, dan is er een lexicografische opsommer.

Bewijs.

Maak een opsommer N als volgt.

De uitvoer van N is lexicografisch geordend.

$N =$ “Negeer invoer :

1. Per getal $n \in \mathbb{N}$:
2. Per woord w met lengte n op volgorde :
3. Simuleer M op invoer w .
4. Als M accepteert, **print** w .

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} beslisbaar is, dan is er een lexicografische opsommer.

Bewijs.

Maak een opsommer N als volgt.

$N =$ “Negeer invoer:

1. Per getal $n \in \mathbb{N}$:
2. Per woord w met lengte n op volgorde:
3. Simuleer M op invoer w .
4. Als M accepteert, **print** w .

De uitvoer van N is lexicografisch geordend.

Stel $w \in \mathcal{L}$, dan kom je na w ooit tegen in stap 3.

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} beslisbaar is, dan is er een lexicografische opsommer.

Bewijs.

Maak een opsommer N als volgt.

$N =$ “Negeer invoer:

1. Per getal $n \in \mathbb{N}$:
2. Per woord w met lengte n op volgorde:
3. Simuleer M op invoer w .
4. Als M accepteert, **print** w .

De uitvoer van N is lexicografisch geordend.

Stel $w \in \mathcal{L}$, dan kom je na w ooit tegen in stap 3. Natuurlijk accepteert M het woord w , dus wordt ze **geprint**.

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} beslisbaar is, dan is er een lexicografische opsommer.

Bewijs.

Maak een opsommer N als volgt.

$N =$ “Negeer invoer:

1. Per getal $n \in \mathbb{N}$:
2. Per woord w met lengte n op volgorde:
3. Simuleer M op invoer w .
4. Als M accepteert, **print** w .

De uitvoer van N is lexicografisch geordend.

Stel $w \in \mathcal{L}$, dan kom je na w ooit tegen in stap 3. Natuurlijk accepteert M het woord w , dus wordt ze **geprint**.

Stel $w \notin \mathcal{L}$. Ook dan komt je het woord ooit tegen, maar M verwerpt het woord dan.

Inleveropgave 5.2.b

Lemma

Als \mathcal{L} beslisbaar is, dan is er een lexicografische opsommer.

Bewijs.

Maak een opsommer N als volgt.

$N =$ “Negeer invoer:

1. Per getal $n \in \mathbb{N}$:
2. Per woord w met lengte n op volgorde:
3. Simuleer M op invoer w .
4. Als M accepteert, **print** w .

De uitvoer van N is lexicografisch geordend.

Stel $w \in \mathcal{L}$, dan kom je na w ooit tegen in stap 3. Natuurlijk accepteert M het woord w , dus wordt ze **geprint**.

Stel $w \notin \mathcal{L}$. Ook dan komt je het woord ooit tegen, maar M verwerpt het woord dan. Dus wordt ze **niet geprint**. ■

Rice's Theorem

Elke niet-triviale eigenschap P van talen van TM 's geeft een onbeslisbare taal $\{\langle M \rangle \mid M \text{ TM en } P(M)\}$.

Rice's Theorem

Elke niet-triviale **eigenschap P van talen van TM 's** geeft een onbeslisbare taal $\{\langle M \rangle \mid M \text{ TM en } P(M)\}$.

Voor TM 's M en N met $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$ en $P(M)$ geldt ook $P(N)$.

Rice's Theorem

Elke **niet-triviale** eigenschap P van talen van TM 's geeft een onbeslisbare taal $\{\langle M \rangle \mid M \text{ TM en } P(M)\}$.

Voor TM 's M en N met $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$ en $P(M)$ geldt ook $P(N)$.

Er zijn TM 's M_+ en M_- zodat $P(M_+)$ wel en $P(M_-)$ niet geldt.

Inleveropgave 6.2

Lemma

De taal Dub is onbeslisbaar.

$$\text{Dub} := \left\{ \langle M \rangle \mid \begin{array}{l} M \text{ een TM en accepteert} \\ \text{enkel woorden van even lengte} \end{array} \right\}$$

Inleveropgave 6.2

Lemma

De taal Dub is onbeslisbaar.

$$\text{Dub} := \left\{ \langle M \rangle \mid \begin{array}{l} M \text{ een TM en accepteert} \\ \text{enkel woorden van even lengte} \end{array} \right\}$$

Bewijs.

Stel M en N hebben dezelfde taal, en M accepteert enkel woorden van even lengte.

Inleveropgave 6.2

Lemma

De taal Dub is onbeslisbaar.

$$\text{Dub} := \left\{ \langle M \rangle \mid \begin{array}{l} M \text{ een TM en accepteert} \\ \text{enkel woorden van even lengte} \end{array} \right\}$$

Bewijs.

Stel M en N hebben dezelfde taal, en M accepteert enkel woorden van even lengte. Dan geldt dat ook voor N .

Inleveropgave 6.2

Lemma

De taal Dub is onbeslisbaar.

$$\text{Dub} := \left\{ \langle M \rangle \mid \begin{array}{l} M \text{ een TM en accepteert} \\ \text{enkel woorden van even lengte} \end{array} \right\}$$

Bewijs.

Stel M en N hebben dezelfde taal, en M accepteert enkel woorden van even lengte. Dan geldt dat ook voor N .

De TM die alles accepteert, accepteert **niet** enkel woorden van even lengte.

Inleveropgave 6.2

Lemma

De taal Dub is onbeslisbaar.

$$\text{Dub} := \left\{ \langle M \rangle \mid \begin{array}{l} M \text{ een TM en accepteert} \\ \text{enkel woorden van even lengte} \end{array} \right\}$$

Bewijs.

Stel M en N hebben dezelfde taal, en M accepteert enkel woorden van even lengte. Dan geldt dat ook voor N .

De TM die alles accepteert, accepteert **niet** enkel woorden van even lengte. De TM die niks accepteert doet dat **wel**.

Inleveropgave 6.2

Lemma

De taal Dub is onbeslisbaar.

$$\text{Dub} := \left\{ \langle M \rangle \mid \begin{array}{l} M \text{ een TM en accepteert} \\ \text{enkel woorden van even lengte} \end{array} \right\}$$

Bewijs.

Stel M en N hebben dezelfde taal, en M accepteert enkel woorden van even lengte. Dan geldt dat ook voor N .

De TM die alles accepteert, accepteert **niet** enkel woorden van even lengte. De TM die niks accepteert doet dat **wel**.

Dus $P(M) := "M \text{ accepteert enkel woorden van even lengte}"$ is een **niet-triviale eigenschap van talen van $\text{TM}'\text{s}$** .

Inleveropgave 6.2

Lemma

De taal Dub is onbeslisbaar.

$$\text{Dub} := \left\{ \langle M \rangle \mid \begin{array}{l} M \text{ een TM en accepteert} \\ \text{enkel woorden van even lengte} \end{array} \right\}$$

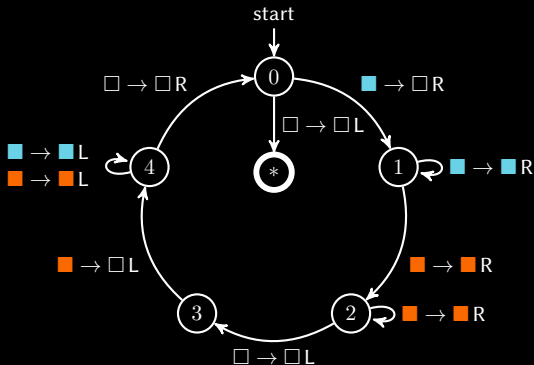
Bewijs.

Stel M en N hebben dezelfde taal, en M accepteert enkel woorden van even lengte. Dan geldt dat ook voor N .

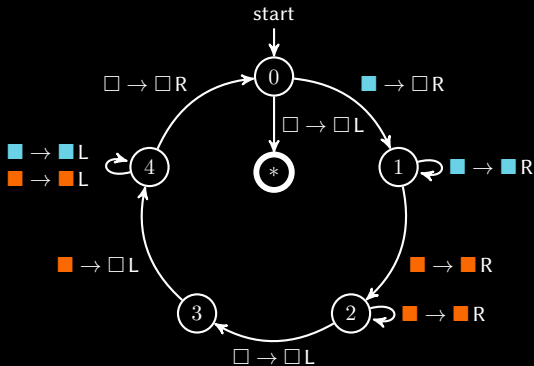
De TM die alles accepteert, accepteert **niet** enkel woorden van even lengte. De TM die niks accepteert doet dat **wel**.

Dus $P(M) := "M \text{ accepteert enkel woorden van even lengte}"$ is een **niet-triviale eigenschap van talen van TM 's**. Met Rice's Stelling is de taal nu onbeslisbaar. ■

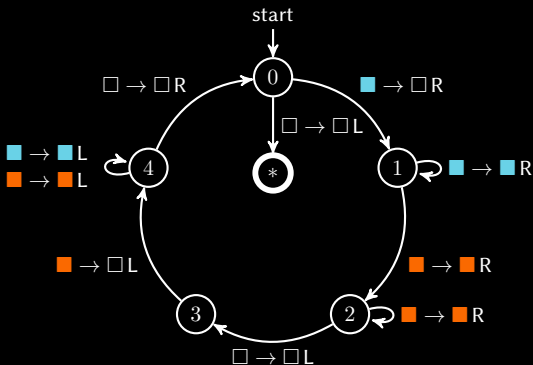
Post Correspondence



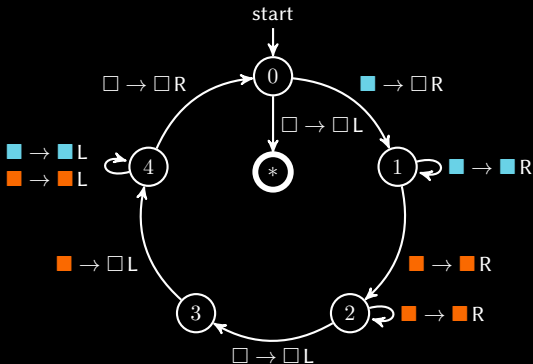
Post Correspondence



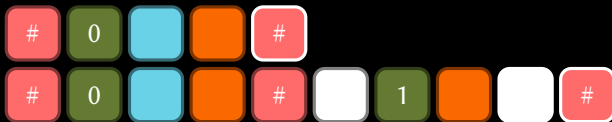
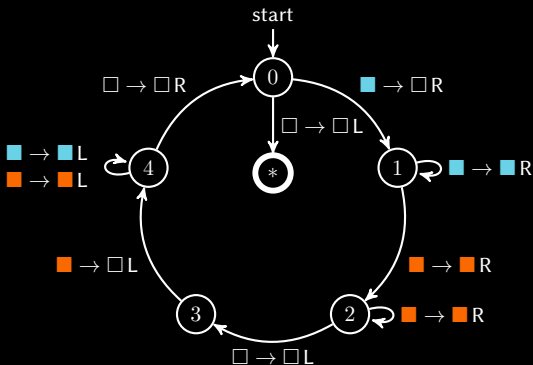
Post Correspondence



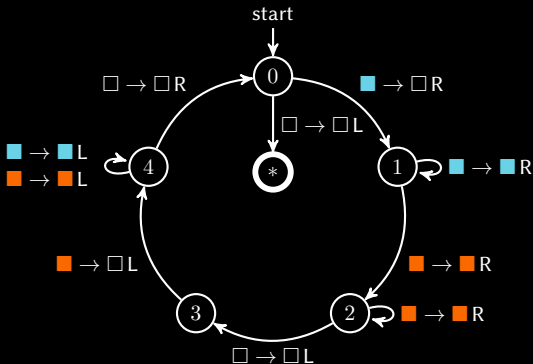
Post Correspondence



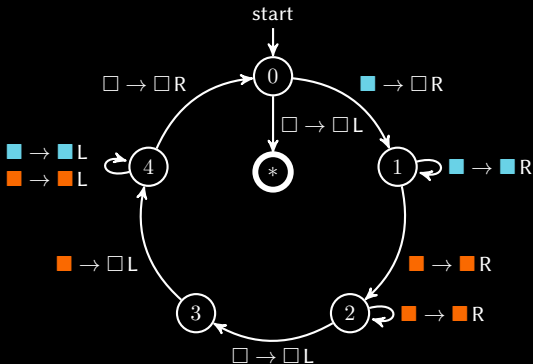
Post Correspondence



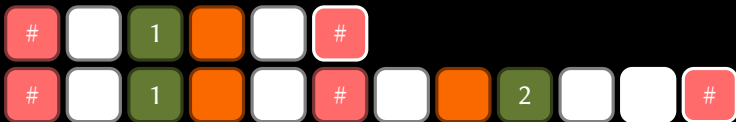
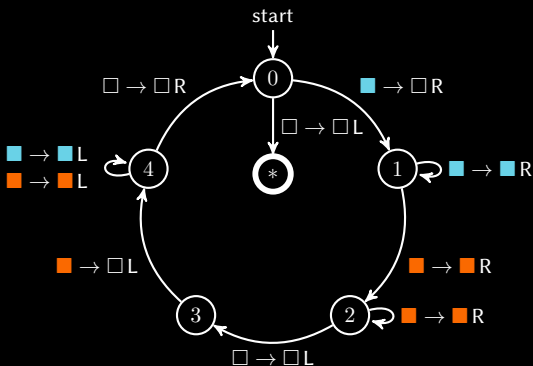
Post Correspondence



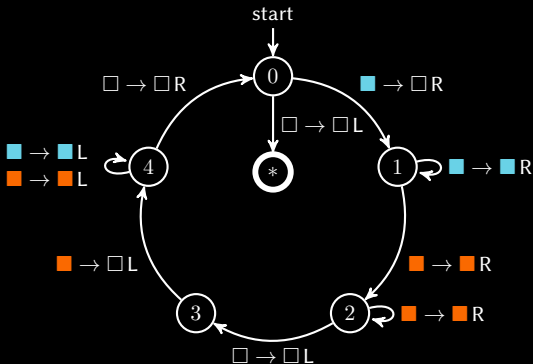
Post Correspondence



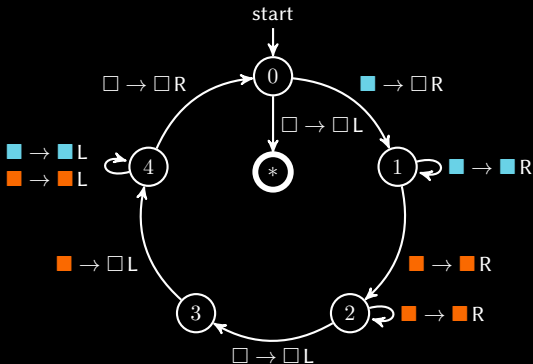
Post Correspondence



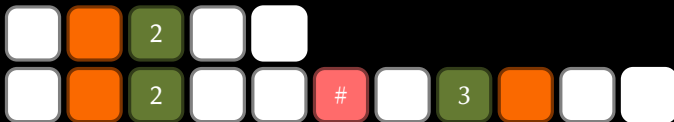
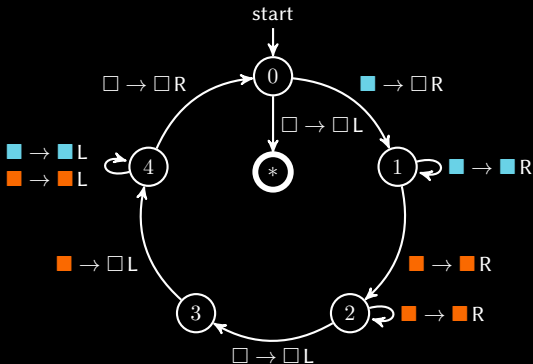
Post Correspondence



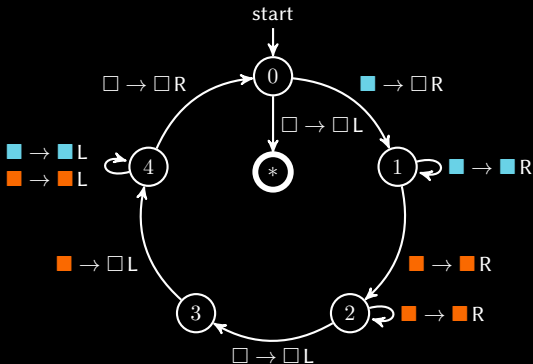
Post Correspondence



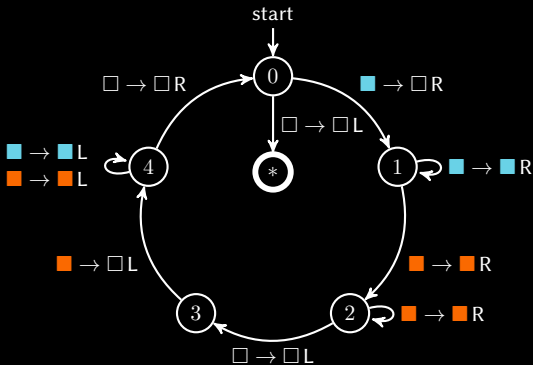
Post Correspondence



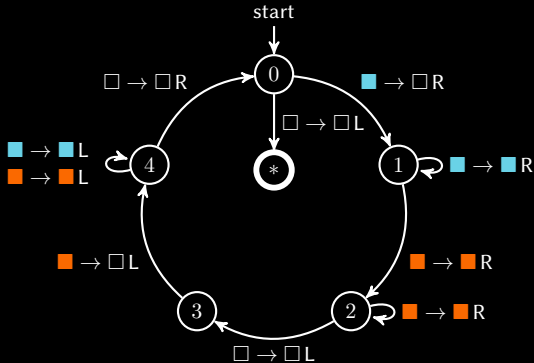
Post Correspondence



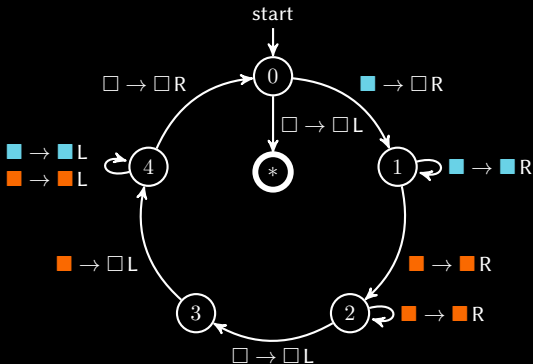
Post Correspondence



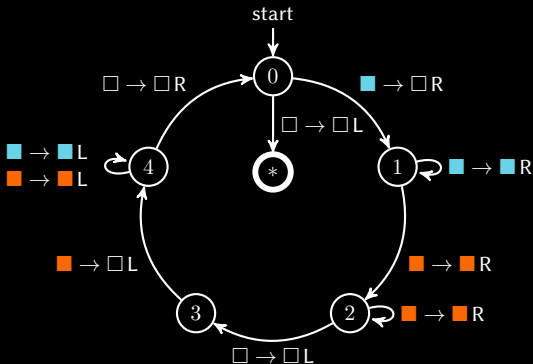
Post Correspondence



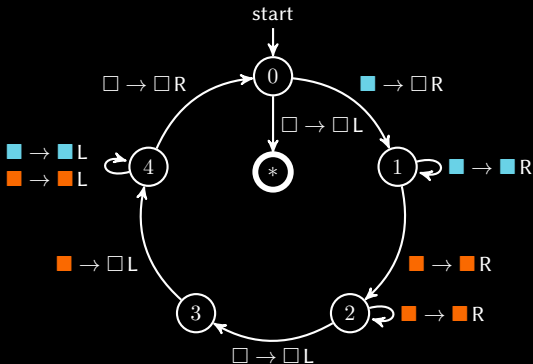
Post Correspondence



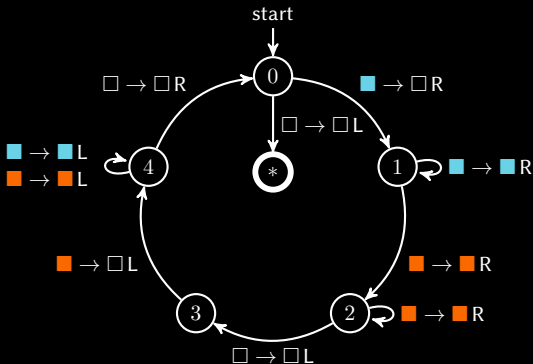
Post Correspondence



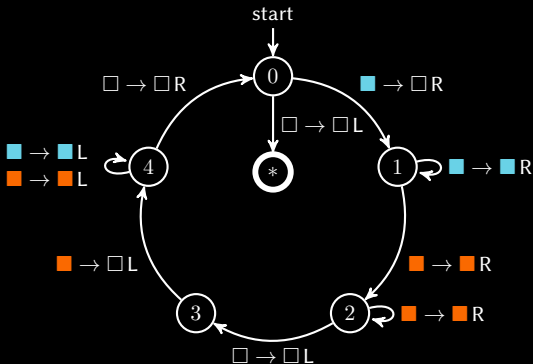
Post Correspondence



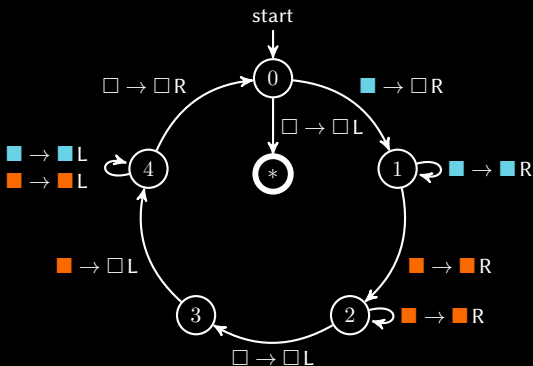
Post Correspondence



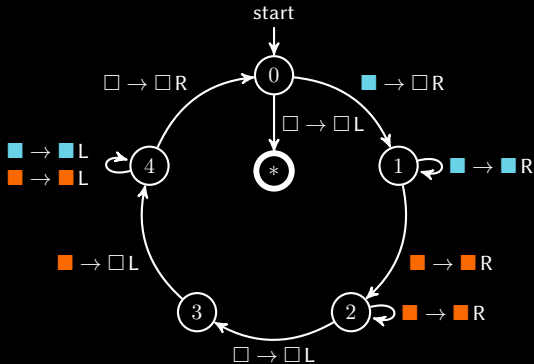
Post Correspondence



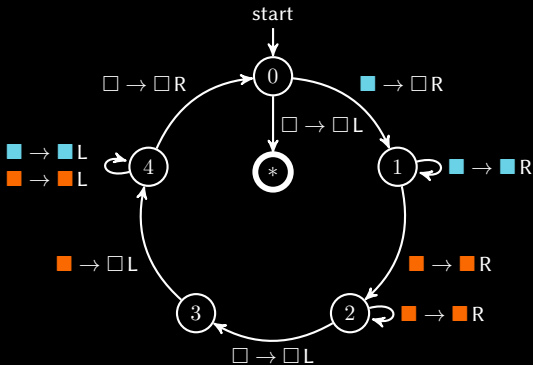
Post Correspondence



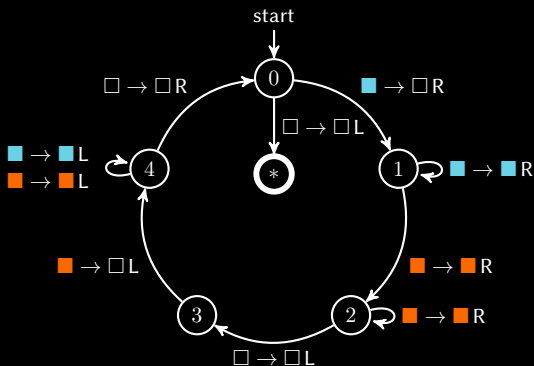
Post Correspondence



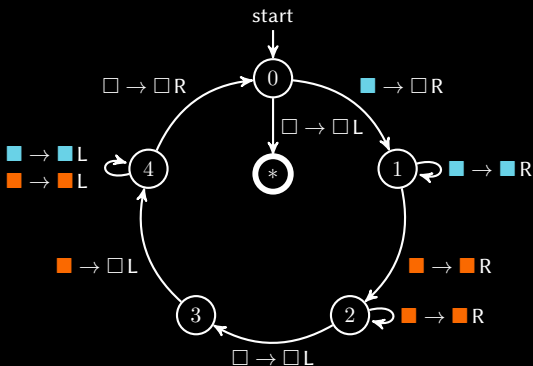
Post Correspondence



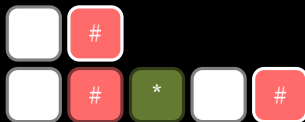
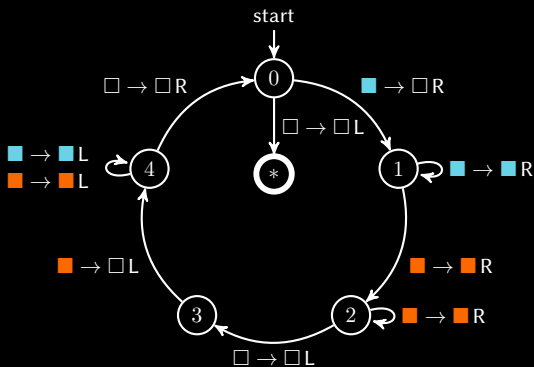
Post Correspondence



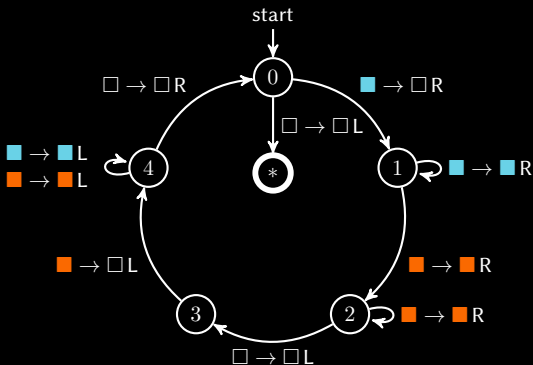
Post Correspondence



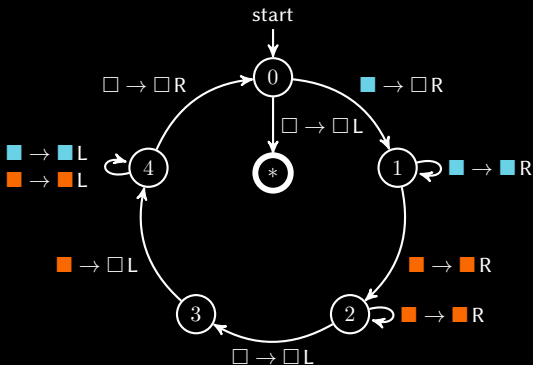
Post Correspondence



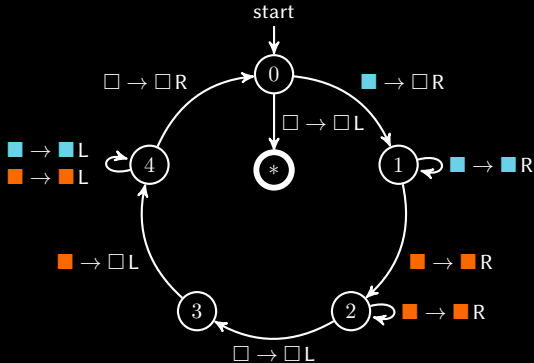
Post Correspondence



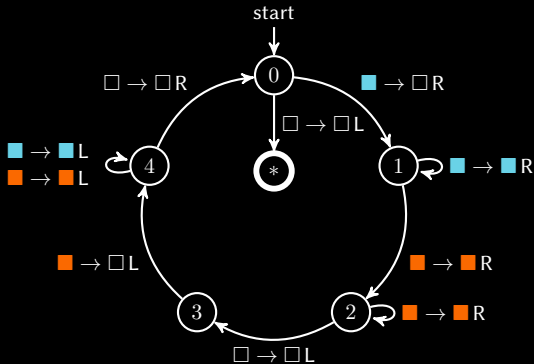
Post Correspondence



Post Correspondence

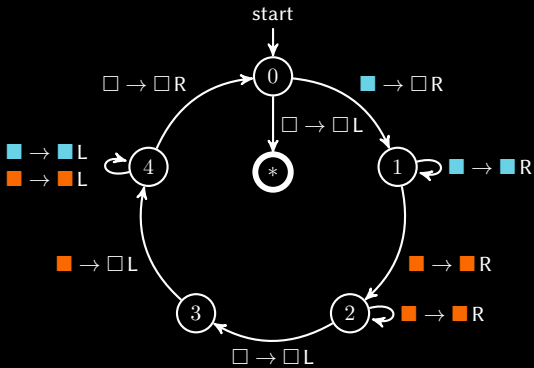


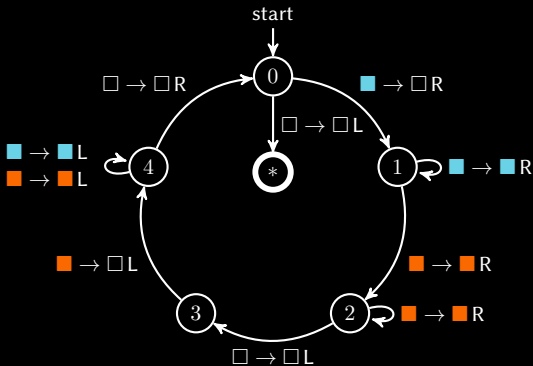
Post Correspondence



deel III

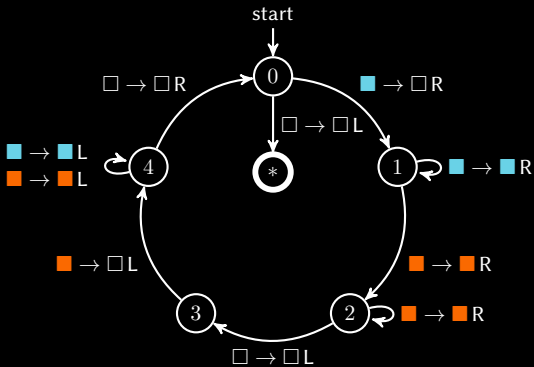
Complexiteit





Complexiteit

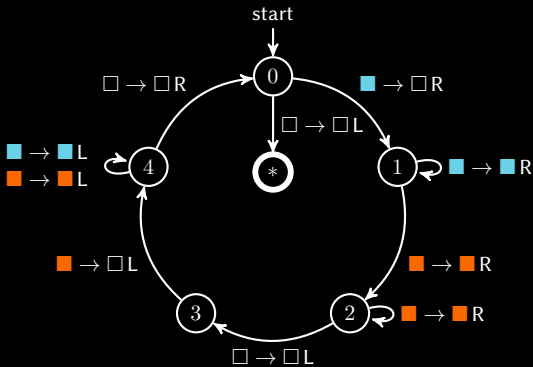




Complexiteit

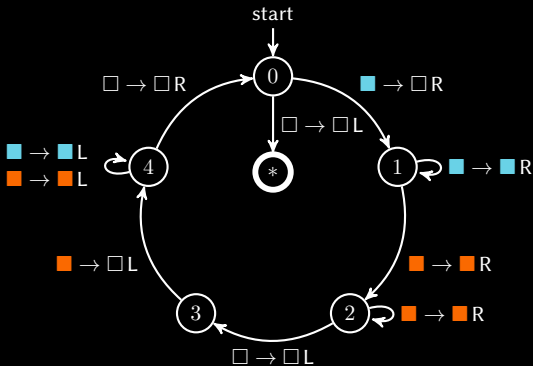
$\blacksquare \blacksquare$

3



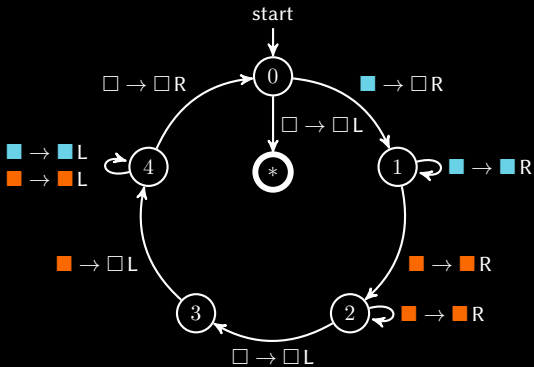
Complexiteit

$\blacksquare \blacksquare$	3
$\blacksquare \blacksquare$	1



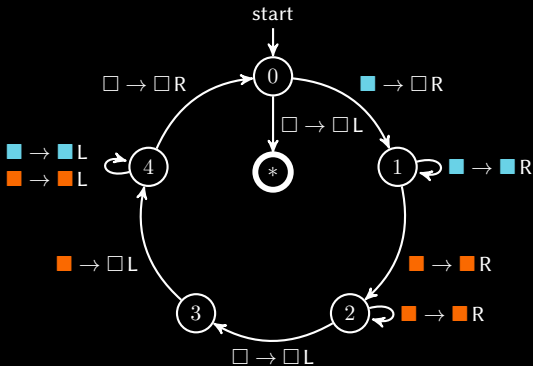
Complexiteit

$\blacksquare \blacksquare$	3
	1
$\blacksquare \blacksquare$	5 + 1
$\blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare$	



Complexiteit

$\blacksquare \blacksquare$	3
	1
$\blacksquare \blacksquare$	5 + 1
$\blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare$	9 + 5 + 1
$\blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare$	



Complexiteit

$\blacksquare \blacksquare$	3
	1
$\blacksquare \blacksquare$	5 + 1
$\blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare$	9 + 5 + 1
$\blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare \blacksquare$	13 + 9 + 5 + 1

Tijdscomplexiteit

Definitie

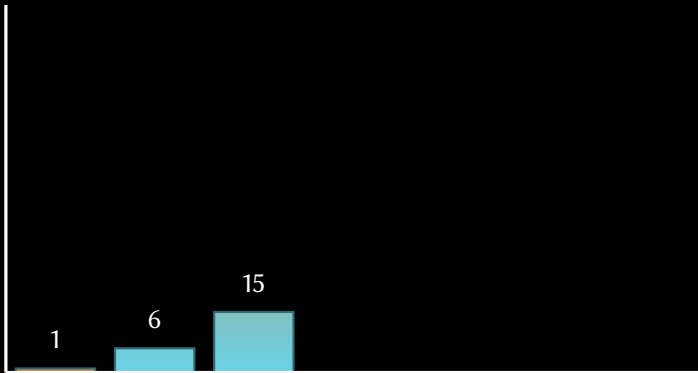
De **tijdscomplexiteit** van een TM M die stopt op alle invoer is gegeven als de functie:

$$n \in \mathbb{N} \mapsto \max \{ \text{stappen van } M \text{ op invoer } w \mid w \in \Sigma^* \text{ en } |w| = n \}$$

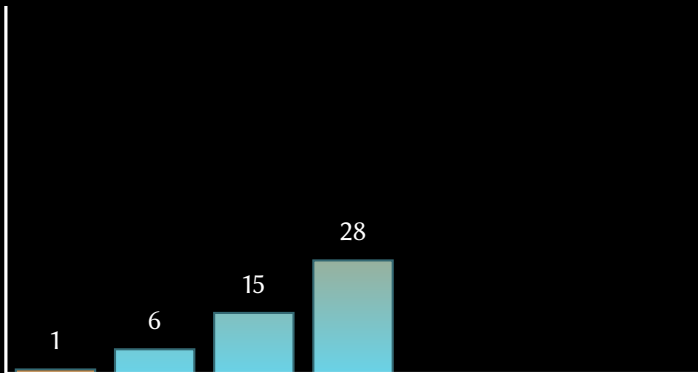
Voorbeeld



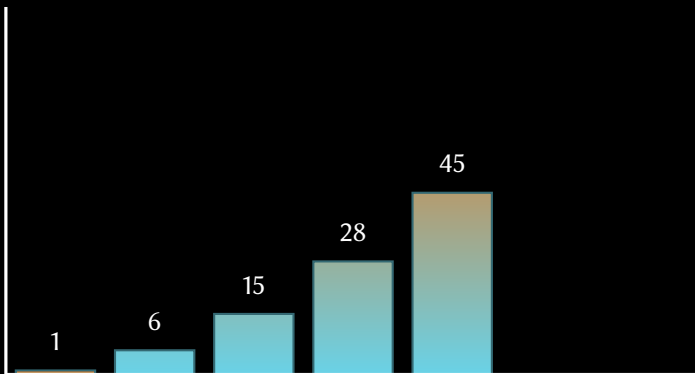
Voorbeeld



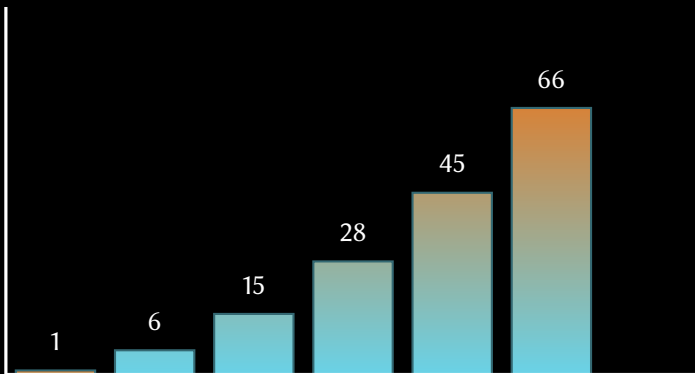
Voorbeeld



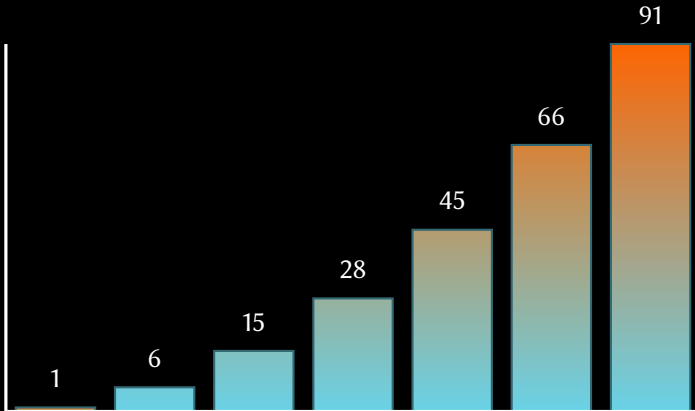
Voorbeeld



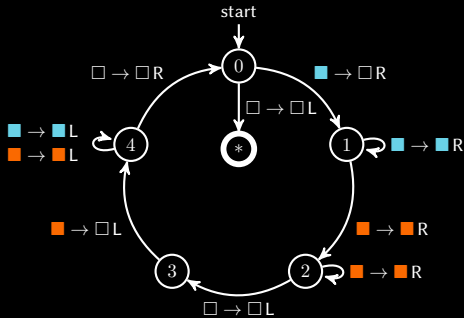
Voorbeeld



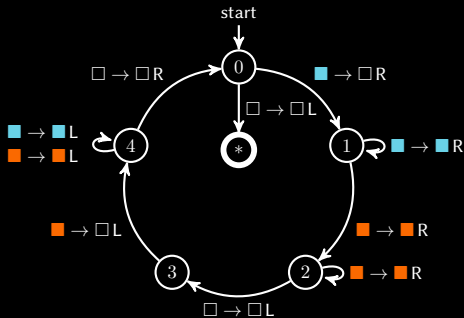
Voorbeeld



Voorbeeld

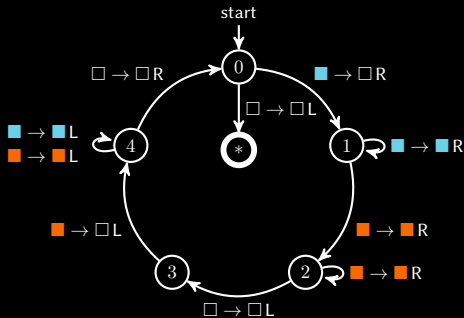


Voorbeeld



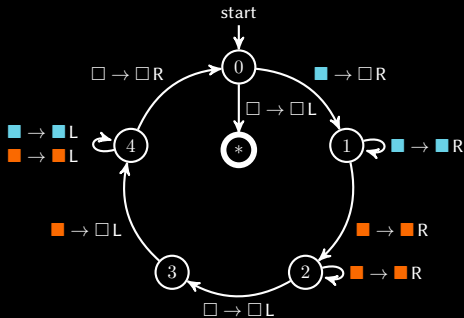
$$1 + \sum_{m=1}^n (1 + (m-1) + 1 + (m-1) + 1 + 1 + (m-1) \cdot 2 + 1)$$

Voorbeeld



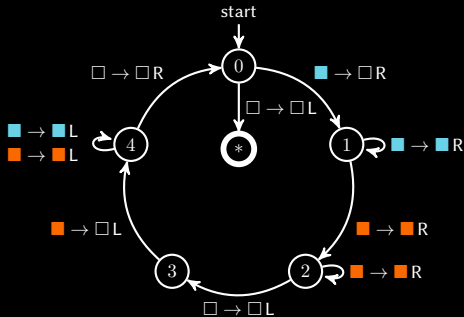
$$\begin{aligned}
 & 1 + \sum_{m=1}^n (1 + (m-1) + 1 + (m-1) + 1 + 1 + (m-1) \cdot 2 + 1) \\
 & = 1 + \sum_{m=1}^n (5 + (m-1) \cdot 4)
 \end{aligned}$$

Voorbeeld



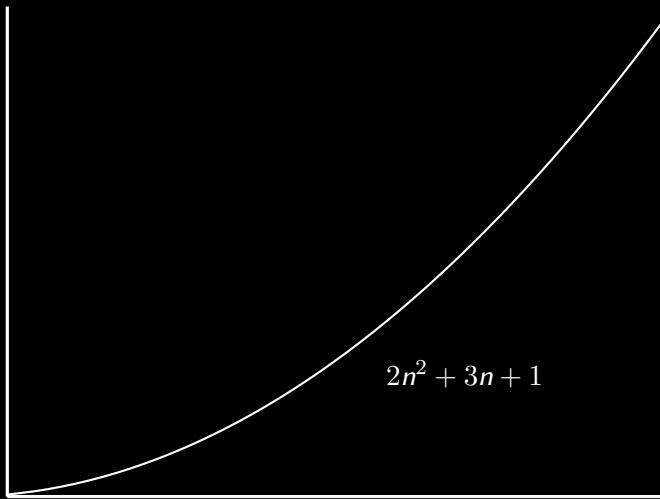
$$\begin{aligned}
 & 1 + \sum_{m=1}^n (1 + (m-1) + 1 + (m-1) + 1 + 1 + (m-1) \cdot 2 + 1) \\
 &= 1 + \sum_{m=1}^n (5 + (m-1) \cdot 4) \\
 &= 1 + 5 \cdot n + 2 \cdot n \cdot (n-1)
 \end{aligned}$$

Voorbeeld

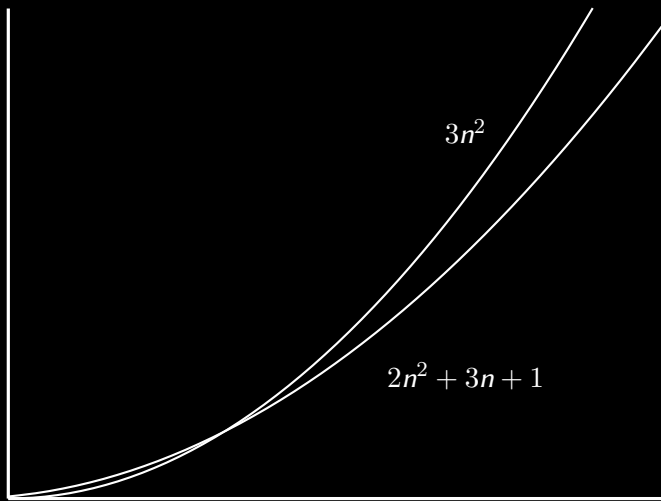


$$\begin{aligned}
 & 1 + \sum_{m=1}^n (1 + (m-1) + 1 + (m-1) + 1 + 1 + (m-1) \cdot 2 + 1) \\
 &= 1 + \sum_{m=1}^n (5 + (m-1) \cdot 4) \\
 &= 1 + 5 \cdot n + 2 \cdot n \cdot (n-1) \quad \text{is kwadratisch}
 \end{aligned}$$

Ongevoelig voor Schalen



Ongevoelig voor Schalen



Grote O

Definitie

Zeg dat f is $O(g)$ indien er $c, N \in \mathbb{N}$ bestaan zodat:

$$f(n) \leq c \cdot g(n) \quad \text{voor alle } n \geq N.$$

Eigenschappen

Lemma

Voor alle $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ geldt $f = O(f)$.

Eigenschappen

Lemma

Voor alle $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ geldt $f = O(f)$.

Lemma

Als $f_1 = O(g_1)$ en $f_2 = O(g_2)$ dan $f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$.

Eigenschappen

Lemma

Voor alle $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ geldt $f = O(f)$.

Lemma

Als $f_1 = O(g_1)$ en $f_2 = O(g_2)$ dan $f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$.

Bewijs.

Neem c_1, c_2, N_1, N_2 zodat

$$f_1(n) \leq c_1 \cdot g_1(n) \quad \text{en} \quad f_2(n) \leq c_2 \cdot g_2(n) \quad \text{voor } n \geq N_1, N_2$$

Eigenschappen

Lemma

Voor alle $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ geldt $f = O(f)$.

Lemma

Als $f_1 = O(g_1)$ en $f_2 = O(g_2)$ dan $f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$.

Bewijs.

Neem c_1, c_2, N_1, N_2 zodat

$$f_1(n) \leq c_1 \cdot g_1(n) \quad \text{en} \quad f_2(n) \leq c_2 \cdot g_2(n) \quad \text{voor } n \geq N_1, N_2$$

Schrijf $c = \max(c_1, c_2)$ en $N = \max(N_1, N_2)$.

Eigenschappen

Lemma

Voor alle $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ geldt $f = O(f)$.

Lemma

Als $f_1 = O(g_1)$ en $f_2 = O(g_2)$ dan $f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$.

Bewijs.

Neem c_1, c_2, N_1, N_2 zodat

$$f_1(n) \leq c_1 \cdot g_1(n) \quad \text{en} \quad f_2(n) \leq c_2 \cdot g_2(n) \quad \text{voor } n \geq N_1, N_2$$

Schrijf $c = \max(c_1, c_2)$ en $N = \max(N_1, N_2)$. Nu geldt

$$f_1(n) + f_2(n) \leq c_1 \cdot g_1(n) + c_2 \cdot g_2(n) \quad \text{voor alle } n \geq N$$

Eigenschappen

Lemma

Voor alle $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ geldt $f = O(f)$.

Lemma

Als $f_1 = O(g_1)$ en $f_2 = O(g_2)$ dan $f_1 + f_2 = O(g_1 + g_2)$.

Bewijs.

Neem c_1, c_2, N_1, N_2 zodat

$$f_1(n) \leq c_1 \cdot g_1(n) \quad \text{en} \quad f_2(n) \leq c_2 \cdot g_2(n) \quad \text{voor } n \geq N_1, N_2$$

Schrijf $c = \max(c_1, c_2)$ en $N = \max(N_1, N_2)$. Nu geldt

$$\begin{aligned} f_1(n) + f_2(n) &\leq c_1 \cdot g_1(n) + c_2 \cdot g_2(n) && \text{voor alle } n \geq N \\ &\leq c \cdot (g_1(n) + g_2(n)) && \text{voor alle } n \geq N \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Voorbeelden

$$n^2 + n = O(n^2)$$

Voorbeelden

$$n^2 + n = O(n^2)$$

$$7 \cdot n^5 + 3n^3 - 102 = O(n^5)$$

Voorbeelden

$$n^2 + n = O(n^2)$$

$$7 \cdot n^5 + 3n^3 - 102 = O(n^5)$$

$$\log(n^2) + 4 = O(\log n)$$

Voorbeelden

$$n^2 + n = O(n^2)$$

$$7 \cdot n^5 + 3n^3 - 102 = O(n^5)$$

$$\log(n^2) + 4 = O(\log n)$$

$$\sqrt{n} = O(n)$$

Tijdscomplexiteitsklasse

$$\text{Time}(f) := \left\{ \mathcal{L} \mid \begin{array}{l} \text{taal } \mathcal{L} \text{ heeft een beslisser} \\ \text{met tijdscomplexiteit } O(f) \end{array} \right\}$$

Palindromen

$M :=$ “Op invoer w :

1. Is de tape leeg, of bevat het enkel een teken, **accepteer**.
2. Lees het eerste teken x , wis het, en loop naar het laatste teken.
3. Controleer of het laatste teken x is.
4. Zo ja, wis het, ga naar het begin van de tape en toestand 1.
5. Zo nee, **verwerp**.”

Palindromen

$N :=$ “Op invoer w :

1. Kopieer de eerste tape achterstevoren naar de tweede tape.
2. Vergelijk de tape stap voor stap. Als alles overeenkomt, **accepteer** en anders, **verwerp**.”

Multi-tape

Als \mathcal{L} een multi-tape beslisser met tijdscomplexiteit in $O(f)$ heeft, dan is er een gewone beslisser met tijdscomplexiteit in $O(f^2)$.

Non-determinisme

Als \mathcal{L} een non-deterministische beslisser met tijdscomplexiteit in $O(f)$ heeft, dan is er een gewone beslisser met tijdscomplexiteit in $2^{O(f)}$.

Gezien

Tijdscomplexiteit

Algoritmes Afschatten & Complexiteitsklassen