Logische Complexiteit

XI : Stelling van Rice

Jeroen Goudsmit
Universiteit Utrecht
donderdag 15 maart 2012

Herhaling

Reductie

$$A \leq_{\mathrm{m}} B$$

Reductes

	Diag	$\overline{\mathrm{Diag}}$
	A_{TM}	$\overline{A_{TM}}$
$\mathrm{Regular}_{TM}$	E_{TM}	$\overline{E_{TM}}$
	EQ_{TM}	$\overline{EQ_{TM}}$

Reducties

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Diag} \arrow[d] & \overline{\mathrm{Diag}} \arrow[d] \\
 & \mathrm{A}_{\mathsf{TM}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \overline{\mathrm{A}_{\mathsf{TM}}} \arrow[dl] \\
\mathrm{Regular}_{\mathsf{TM}} & \mathrm{E}_{\mathsf{TM}} \arrow[d] & \overline{\mathrm{E}_{\mathsf{TM}}} \arrow[d] \\
 & \mathrm{EQ}_{\mathsf{TM}} & \overline{\mathrm{EQ}_{\mathsf{TM}}}
\end{tikzcd}$$

Reducties

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Diag} \arrow[d] & \overline{\mathrm{Diag}} \arrow[d] \\
 & A_{\mathrm{TM}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \overline{A_{\mathrm{TM}}} \arrow[dl] \\
\mathrm{Regular}_{\mathrm{TM}} & E_{\mathrm{TM}} \arrow[d] & \overline{E_{\mathrm{TM}}} \arrow[d] \\
 & EQ_{\mathrm{TM}} & \overline{EQ_{\mathrm{TM}}}
\end{tikzcd}
$$

Reguliere Taal

Lemma
$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Reguliere Taal

Lemma
$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$,
construeer de TM.
N = "Op invoer v:

1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Reguliere Taal

Lemma
$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$,
construeer de TM.
N = "Op invoer v:

1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Reguliere Taal

Lemma
$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$, construeer de TM.
N = "Op invoer v:
1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$.

Reguliere Taal

Lemma
$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$, construeer de TM.
N = "Op invoer v:

1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Ieder woord wordt door N geaccepteerd.

Reguliere Taal

Lemma

$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$, construeer de TM.

N = "Op invoer v:

1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Ieder woord wordt door N geaccepteerd. Dus $\langle N \rangle \in \text{Regular}_{TM}$.

Reguliere Taal

Lemma

$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$, construeer de TM.

N = "Op invoer v:

1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Ieder woord wordt door N geaccepteerd. Dus $\langle N \rangle \in \text{Regular}_{TM}$.

Stel $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$.

Reguliere Taal

Lemma
$A_{TM} \leq_m \mathrm{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$, construeer de TM.
N = "Op invoer v:

1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Ieder woord wordt door N geaccepteerd. Dus $\langle N \rangle \in \mathrm{Regular}_{TM}$.

Stel $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$. Alleen palindromen worden door N geaccepteerd.

Reguliere Taal

Lemma
$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$, construeer de TM.
N = "Op invoer v:

1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Ieder woord wordt door N geaccepteerd. Dus $\langle N \rangle \in \text{Regular}_{TM}$.

Stel $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$. Alleen palindromen worden door N geaccepteerd. Dus $\langle N \rangle \notin \text{Regular}_{TM}$.

∎

Talen van TM's

$$\text{Regular}_{\text{TM}} \quad := \quad \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ is een TM en} \\ \text{d'r taal is regulier} \end{array} \right\}$$

Talen van TM's

$$\text{Regular}_{\text{TM}} := \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ is een TM en} \\ \text{d'r taal is regulier} \end{array} \right\}$$

$$\text{ContextVrij}_{\text{TM}} := \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ is een TM en} \\ \text{d'r taal is context-vrij} \end{array} \right\}$$

Talen van TM's

$$\text{Regular}_{\text{TM}} := \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ is een TM en} \\ \text{d'r taal is regulier} \end{array} \right\}$$

$$\text{ContextVrij}_{\text{TM}} := \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ is een TM en} \\ \text{d'r taal is context-vrij} \end{array} \right\}$$

$$\text{Spock} := \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ is een TM en} \\ \text{accepteert } \langle \mathit{SpockRocks} \rangle \end{array} \right\}$$

Algemene Reductie

Lemma
Er geldt $\mathrm{A}_{TM} \leq_{\mathrm{m}}$ Spock.

Algemene Reductie

Lemma
Er geldt $\mathrm{A}_{\mathit{TM}} \leq_{\mathrm{m}} \mathrm{Spock}$.

Bewijs.

Gegeven het paar $\langle M, w \rangle$
maak een TM.

$S_{M,w} :=$ "Op invoer v:
1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, accepteer.
3. Anders, verwerp.

Algemene Reductie

Lemma
Er geldt $\mathrm{A}_{\textsc{tm}} \leq_{\mathrm{m}}$ Spock.

Bewijs.

Gegeven het paar $\langle M, w \rangle$ maak een TM.

Stel dat $\langle M, w \rangle \in \mathrm{A}_{\textsc{tm}}$.

$S_{M,w}$:= "Op invoer v:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, accepteer.
3. Anders, verwerp.

Algemene Reductie

Lemma
Er geldt $\mathrm{A}_{\mathsf{TM}} \leq_{\mathrm{m}}$ Spock.

Bewijs.

Gegeven het paar $\langle M, w \rangle$ maak een TM.

$S_{M,w}$:= "Op invoer v:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, accepteer.
3. Anders, verwerp.

Stel dat $\langle M, w \rangle \in \mathrm{A}_{\mathsf{TM}}$. Dan accepteert M dus op invoer w.

Algemene Reductie

Lemma
Er geldt $\mathrm{A}_{TM} \leq_{\mathrm{m}}$ Spock.

Bewijs.

Gegeven het paar $\langle M, w \rangle$ maak een TM.

$S_{M,w} :=$ “Op invoer v:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, accepteer.
3. Anders, verwerp.

Stel dat $\langle M, w \rangle \in \mathrm{A}_{\mathrm{TM}}$. Dan accepteert M dus op invoer w. Dus accepteert $S_{M,w}$ het woord $\langle \mathit{SpockRocks} \rangle$. En dus ook $\langle S_{M,w} \rangle \in$ Spock.

Algemene Reductie

Lemma
Er geldt $\mathrm{A}_{TM} \leq_{\mathrm{m}} \mathrm{Spock}$.

Bewijs.

Gegeven het paar $\langle M, w \rangle$ maak een TM.

$S_{M,w} :=$ "Op invoer v:
1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, accepteer.
3. Anders, verwerp.

Stel dat $\langle M, w \rangle \in \mathrm{A}_{\mathrm{TM}}$. Dan accepteert M dus op invoer w. Dus accepteert $S_{M,w}$ het woord $\langle \mathit{SpockRocks} \rangle$. En dus ook $\langle S_{M,w} \rangle \in \mathrm{Spock}$.

Stel dat $\langle M, w \rangle \notin \mathrm{A}_{\mathrm{TM}}$.

Algemene Reductie

Lemma

Er geldt $\mathrm{A}_{TM} \leq_{\mathrm{m}} \mathrm{Spock}$.

Bewijs.

Gegeven het paar $\langle M, w \rangle$ maak een TM.

$S_{M,w} :=$ “Op invoer v:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, accepteer.
3. Anders, verwerp.

Stel dat $\langle M, w \rangle \in \mathrm{A}_{\mathrm{TM}}$. Dan accepteert M dus op invoer w. Dus accepteert $S_{M,w}$ het woord $\langle \mathit{SpockRocks} \rangle$. En dus ook $\langle S_{M,w} \rangle \in \mathrm{Spock}$.

Stel dat $\langle M, w \rangle \notin \mathrm{A}_{\mathrm{TM}}$. Dan accepteert M de invoer M niet.

Algemene Reductie

Lemma
Er geldt $A_{TM} \leq_m$ Spock.

Bewijs.

Gegeven het paar $\langle M, w \rangle$ maak een TM.

$S_{M,w}$:= "Op invoer v:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, accepteer.
3. Anders, verwerp.

Stel dat $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Dan accepteert M dus op invoer w. Dus accepteert $S_{M,w}$ het woord $\langle$ *SpockRocks* $\rangle$. En dus ook $\langle S_{M,w} \rangle \in$ Spock.

Stel dat $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$. Dan accepteert M de invoer M niet. Hier volgt $\langle S_{M,w} \rangle \notin$ Spock. ∎

Stelling van Rice

Stelling

Als P een niet-triviale eigenschap is van talen van TM's, dan is de taal $\mathcal{L}_P := \left\{ \langle M \rangle \,\middle|\, M \text{ een TM en } P(M) \right\}$ *onbeslisbaar.*

Stelling van Rice

Stelling

Als P een niet-triviale eigenschap is van talen van TM's, dan is de taal $\mathcal{L}_P := \{\langle M \rangle \mid M \text{ een TM en } P(M)\}$ onbeslisbaar.

Als $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(N)$ en $P(M)$ dan $P(N)$.

Er zijn TM's M en M zodat $P(M)$ wel en $P(M)$ niet geldt.

Stelling van Rice

T, een TM die niks accepteert

Stelling

Als P een niet-triviale eigenschap is van talen van TM's, dan is de taal $\mathcal{L}_P := \{\langle M \rangle \mid M \text{ een TM en } P(M)\}$ onbeslisbaar.

Stelling van Rice

T, een TM die niks accepteert

Stelling

Als P een niet-triviale eigenschap is van talen van TM's, dan is de taal $\mathcal{L}_P := \{\langle M \rangle \mid M \text{ een TM en } P(M)\}$ onbeslisbaar.

Bewijs.

Per $\langle M, w \rangle$ maak TM $S_{M,w}$.

Stelling van Rice

Stelling.

T, een TM die niks accepteert

Als P een niet-triviale eigenschap is van talen van TM's, dan is de taal $\mathcal{L}_P := \{\langle M \rangle \mid M \text{ een TM en } P(M)\}$ onbeslisbaar.

Bewijs.

Per $\langle M, w \rangle$ maak TM $S_{M,w}$.

$S_{M,w}$:= "Op invoer v:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, doe als M op v.
3. Als ze verwerpt, verwerp."

Stelling van Rice

T, een TM die niks accepteert

Stelling.

Als P een niet-triviale eigenschap is van talen van TM's, dan is de taal $\mathcal{L}_P := \{\langle M \rangle \mid M \text{ een TM en } P(M)\}$ onbeslisbaar.

Bewijs.

Per $\langle M, w \rangle$ maak TM $S_{M,w}$.

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$.

$S_{M,w}$:= "Op invoer v:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, doe als M op v.
3. Als ze verwerpt, verwerp."

Stelling van Rice

Stelling.

T, een TM die niks accepteert

Als P een niet-triviale eigenschap is van talen van TM's, dan is de taal $\mathcal{L}_P := \{\langle M \rangle \mid M \text{ een TM en } P(M)\}$ onbeslisbaar.

Bewijs.

Per $\langle M, w \rangle$ maak TM $S_{M,w}$.

$S_{M,w}$:= "Op invoer v:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, doe als M op v.
3. Als ze verwerpt, verwerp."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Dan accepteert $S_{M,w}$ hetzelfde als M.

Stelling van Rice

Stelling.

T, een TM die niks accepteert

Als P een niet-triviale eigenschap is van talen van TM's, dan is de taal $\mathcal{L}_P := \{\langle M \rangle \mid M \text{ een TM en } P(M)\}$ onbeslisbaar.

Bewijs.

Per $\langle M, w \rangle$ maak TM $S_{M,w}$.

$S_{M,w}$:= "Op invoer v:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, doe als M op v.
3. Als ze verwerpt, verwerp."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{\text{TM}}$. Dan accepteert $S_{M,w}$ hetzelfde als M. Dus $\langle S_{M,w} \rangle \in \mathcal{L}_P$.

Stelling van Rice

T, een TM die niks accepteert

Stelling.

Als P een niet-triviale eigenschap is van talen van TM's, dan is de taal $\mathcal{L}_P := \{\langle M \rangle \mid M \text{ een TM en } P(M)\}$ onbeslisbaar.

Bewijs.

Per $\langle M, w \rangle$ maak TM $S_{M,w}$.

$S_{M,w} :=$ "Op invoer v:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, doe als M op v.
3. Als ze verwerpt, verwerp."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Dan accepteert $S_{M,w}$ hetzelfde als M. Dus $\langle S_{M,w} \rangle \in \mathcal{L}_P$.

Stel nu dat $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$.

Stelling van Rice

Stelling

T, een TM die niks accepteert

Als P een niet-triviale eigenschap is van talen van TM's, dan is de taal $\mathcal{L}_P := \{\langle M \rangle \mid M \text{ een TM en } P(M)\}$ onbeslisbaar.

Bewijs.

Per $\langle M, w \rangle$ maak TM $S_{M,w}$.

$S_{M,w} :=$ "Op invoer v:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, doe als M op v.
3. Als ze verwerpt, verwerp."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Dan accepteert $S_{M,w}$ hetzelfde als M. Dus $\langle S_{M,w} \rangle \in \mathcal{L}_P$.

Stel nu dat $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$. Nu accepteert $S_{M,w}$ niks.

Stelling van Rice

T, een TM die niks accepteert

Stelling.

Als P een niet-triviale eigenschap is van talen van TM's, dan is de taal $\mathcal{L}_P := \{\langle M \rangle \mid M \text{ een TM en } P(M)\}$ onbeslisbaar.

Bewijs.

Per $\langle M, w \rangle$ maak TM $S_{M,w}$.

$S_{M,w}$:= "Op invoer v:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, doe als M op v.
3. Als ze verwerpt, verwerp."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Dan accepteert $S_{M,w}$ hetzelfde als M. Dus $\langle S_{M,w} \rangle \in \mathcal{L}_P$.

Stel nu dat $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$. Nu accepteert $S_{M,w}$ niks. Dus $\langle S_{M,w} \rangle \notin \mathcal{L}_P$.

Stelling van Rice

T, een TM die niks accepteert

Stelling

Als P een niet-triviale eigenschap is van talen van TM's, dan is de taal $\mathcal{L}_P := \{\langle M \rangle \mid M \text{ een TM en } P(M)\}$ onbeslisbaar.

Bewijs.

Per $\langle M, w \rangle$ maak TM $S_{M,w}$.

$S_{M,w}$:= "Op invoer v:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, doe als M op v.
3. Als ze verwerpt, verwerp."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Dan accepteert $S_{M,w}$ hetzelfde als M. Dus $\langle S_{M,w} \rangle \in \mathcal{L}_P$.

Stel nu dat $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$. Nu accepteert $S_{M,w}$ niks. Dus $\langle S_{M,w} \rangle \notin \mathcal{L}_P$.

Dus $A_{TM} \leq_m \mathcal{L}_P$, dus $\mathcal{L}_P$ is onbeslisbaar.

Stelling van Rice

T, een TM die niks accepteert

Stelling

Als P een niet-triviale eigenschap is van talen van TM's, dan is de taal $\mathcal{L}_P := \{\langle M \rangle \mid M \text{ een TM en } P(M)\}$ onbeslisbaar.

Bewijs.

Per $\langle M, w \rangle$ maak TM $S_{M,w}$.

$S_{M,w} :=$ "Op invoer v:

1. Simuleer M op invoer w.
2. Als ze accepteert, doe als M op v.
3. Als ze verwerpt, verwerp."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Dan accepteert $S_{M,w}$ hetzelfde als M. Dus $\langle S_{M,w} \rangle \in \mathcal{L}_P$.

Stel nu dat $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$. Nu accepteert $S_{M,w}$ niks. Dus $\langle S_{M,w} \rangle \notin \mathcal{L}_P$.

Dus $A_{TM} \leq_m \mathcal{L}_P$, dus $\mathcal{L}_P$ is onbeslisbaar. Merk op dat als $P(T)$ wel geldt, dan bewijst bovenstaande onbeslisbaarheid $\overline{\mathcal{L}_P}$. ■

Voorbeelden ten Overvloedde

	M	M
Spock	"Op invoer w: accept"	"Op invoer w: verwerp"

Voorbeelden ten Overvloedde

	M	M
Spock	"Op invoer w: accept"	"Op invoer w: verwerp"
E_{TM}	"Op invoer w: verwerp"	"Op invoer w: accept"

Voorbeelden ten Overvloedde

	M	M
Spock	"Op invoer w: accept"	"Op invoer w: verwerp"
E_{TM}	"Op invoer w: verwerp"	"Op invoer w: accept"
Regular_{TM}	"Op invoer w: verwerp"	"Op invoer w: accept als w een palindroom is"

Voorbeelden ten Overvloedde

	M	M
Spock	"Op invoer w: accept"	"Op invoer w: verwerp"
E_{TM}	"Op invoer w: verwerp"	"Op invoer w: accept"
Regular_{TM}	"Op invoer w: verwerp"	"Op invoer w: accept als w een palindroom is"
ContextVrij_{TM}	"Op invoer w: verwerp"	"Op invoer w: accept als w priemlengte heeft"

Context-vrije Talen

$$\mathrm{All}_{\textsc{cfg}} := \left\{ \langle G \rangle \;\middle|\; \begin{array}{c} G \text{ is een } \textsc{cfg} \text{ en} \\ \text{accepteert alles} \end{array} \right\}$$

$$A_{TM} \leq_m \overline{All_{CFG}}$$

Berekening

Gegeven TM M en woord w, maak de volgende TM.

$S_{M,w} :=$ "Op invoer $\langle C_1, \ldots, C_n \rangle$:

1. Test of C_1 de startconfiguratie is van M op w, zo nee, accepteer.
2. Test of C_n een accepterende configuratie is van M, zo nee, accepteer.
3. Voor elke i tussen 1 en $n - 1$:

3a. Test of C_i en C_{i+1} hetzelfde zijn op een geldige transitie in M na. Zo nee, accepteer.

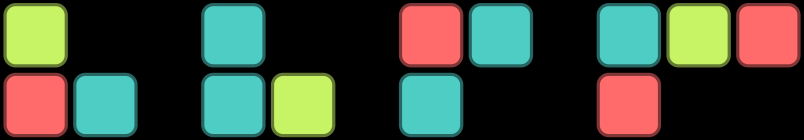
Gemakkelijke Berekening

Berekening kan deels gedaan worden door een PDA!

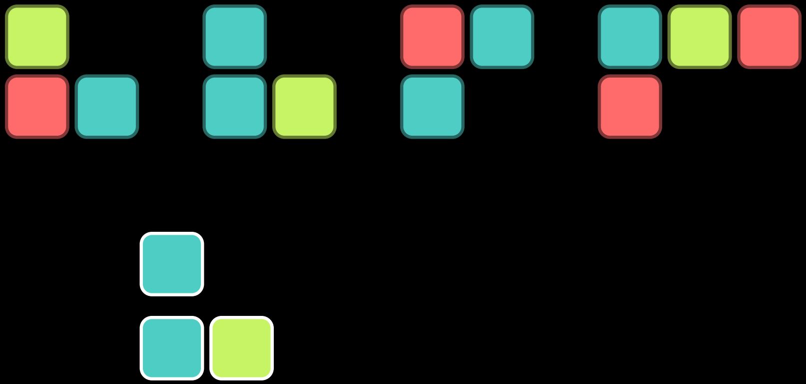
Gemakkelijke Berekening

Berekening kan deels gedaan worden door een PDA!

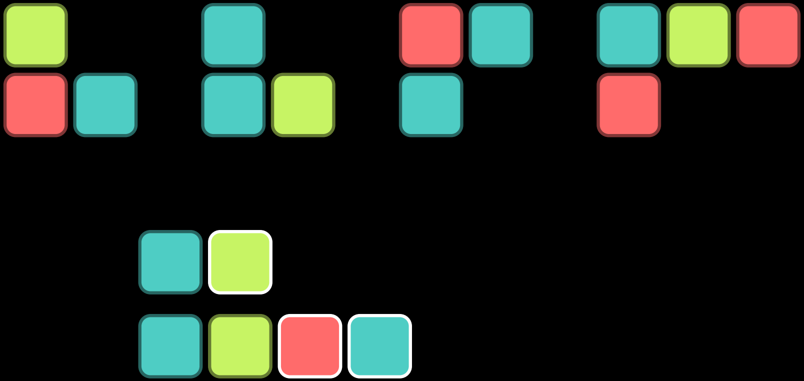
Passen



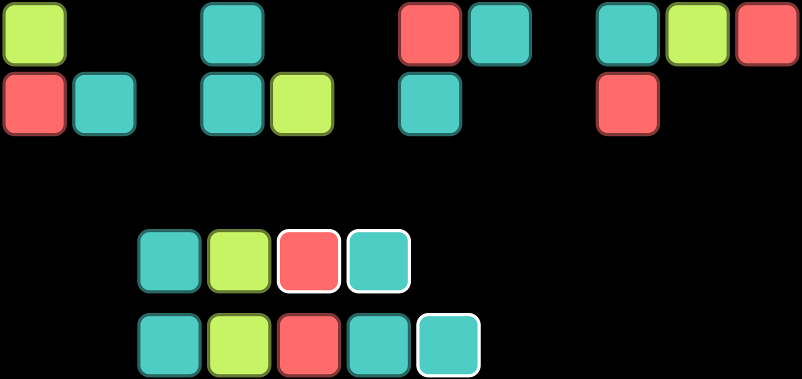
Passen



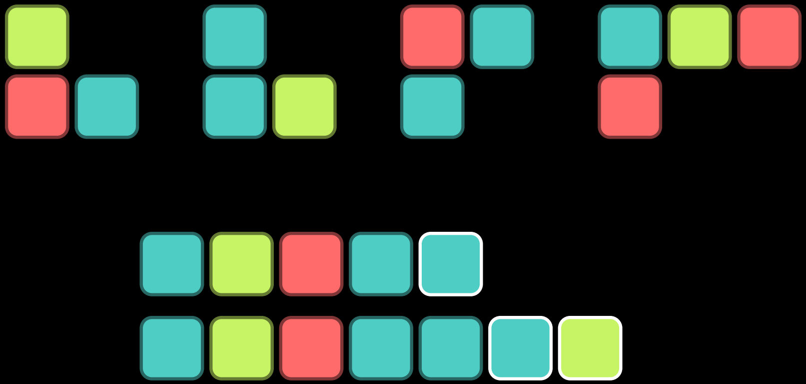
Passen



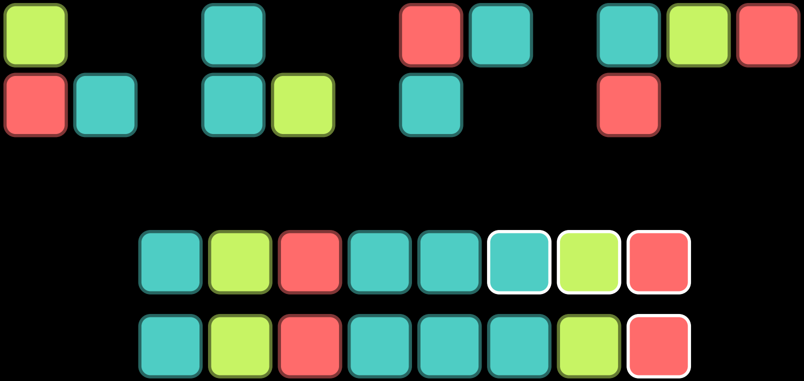
Passen



Passen

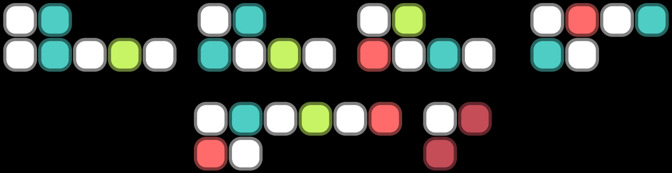


Passen

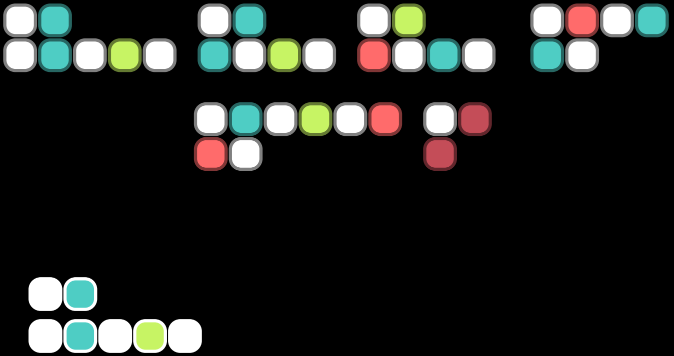


Aangepast Passen

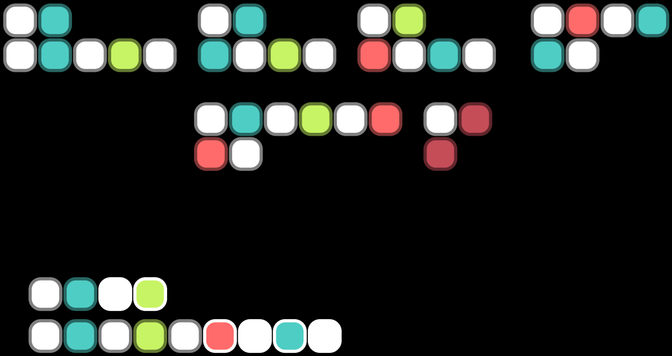
Aangepast Passen



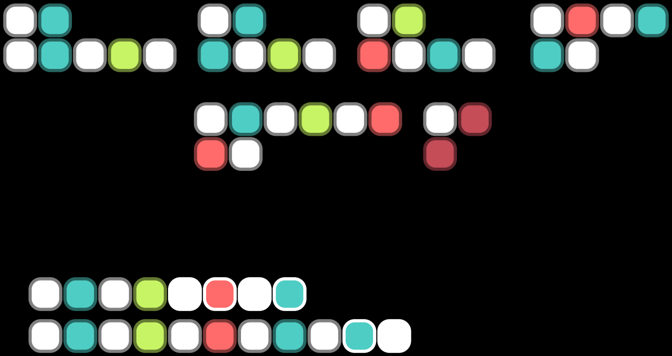
Aangepast Passen



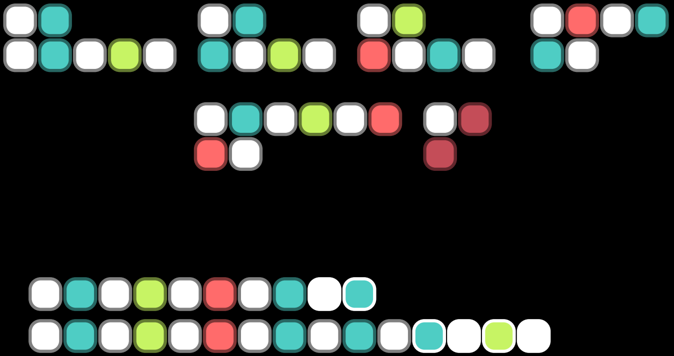
Aangepast Passen



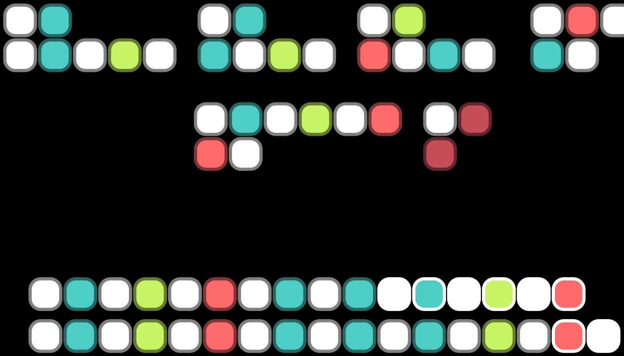
Aangepast Passen



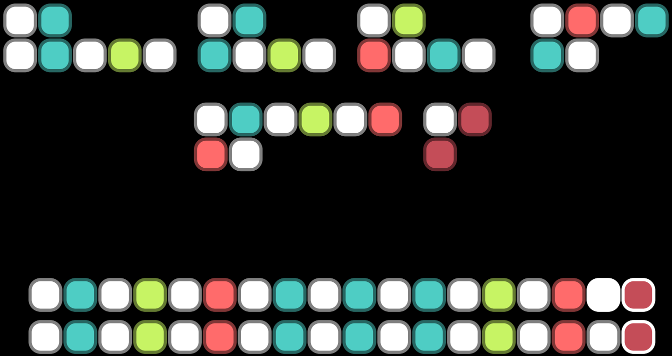
Aangepast Passen



Aangepast Passen



Aangepast Passen



Post Correspondence Problem

Definitie

Instantie van Post correspondence is een paar $\langle \Sigma, D \rangle$ met :

Σ	eindige verzameling	alfabet
D	eindige verzameling paren uit Σ^*	dominos

Post Correspondence Problem

Definitie

Instantie van Post correspondence is een paar $\langle \Sigma, D \rangle$ met :

Σ	eindige verzameling	alfabet
D	eindige verzameling paren uit Σ^*	dominos

Een oplossing is een rijtje $\langle u_1, v_1 \rangle, \ldots, \langle u_n, v_n \rangle \in D$ zodat :

$$u_1 \ldots u_n = v_1 \ldots v_n.$$

Post Correspondence Problem

$$\mathrm{PCP} := \left\{ \langle P \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} P \text{ is een instantie van} \\ \text{Post correspondence} \\ \text{met een oplossing} \end{array} \right\}$$

Turing Machine simuleren

Instantie MPCP zódat oplossing berekening geeft.

$$A_{TM} \leq_m PCP$$

Gezien

Stelling van Rice

$\mathrm{All}_{\mathrm{CFG}}$

PCP