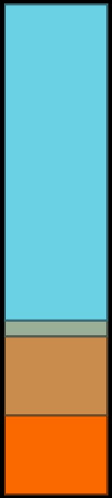
Logische Complexiteit

X : Onbeslisbare Talen

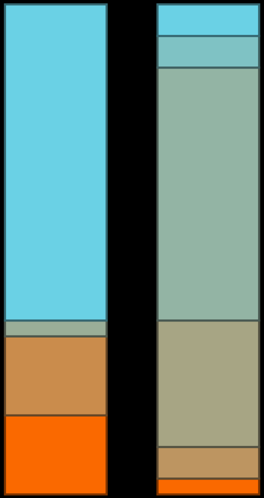
Jeroen Goudsmit
Universiteit Utrecht
dinsdag 13 maart 2012

Deeltoets

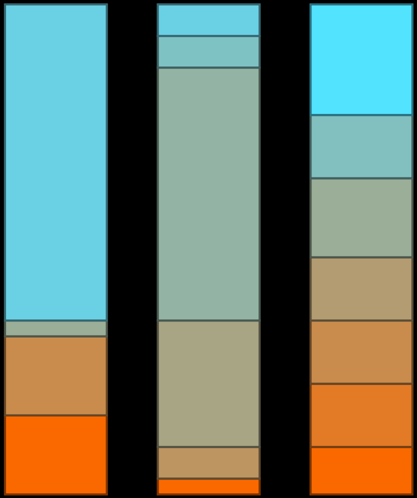
Deeltoets



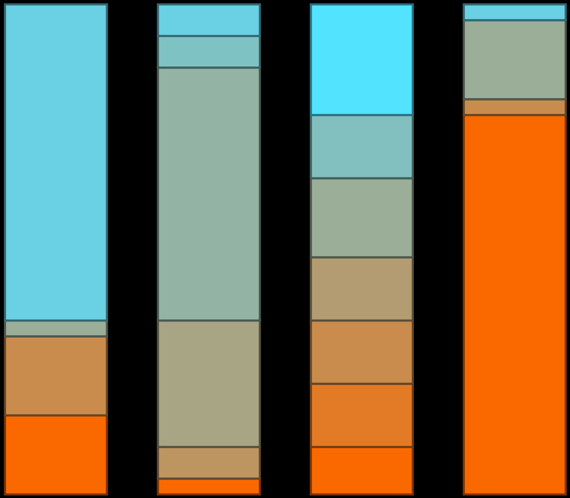
Deeltoets



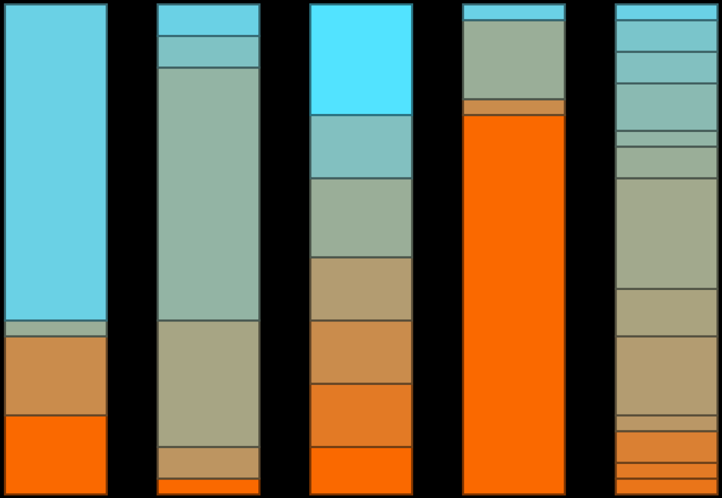
Deeltoets



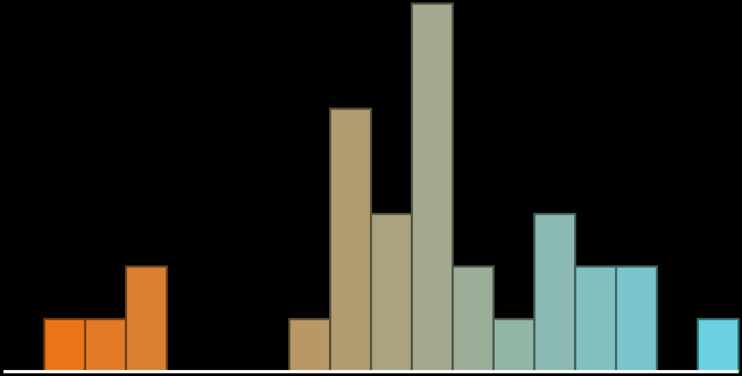
Deeltoets



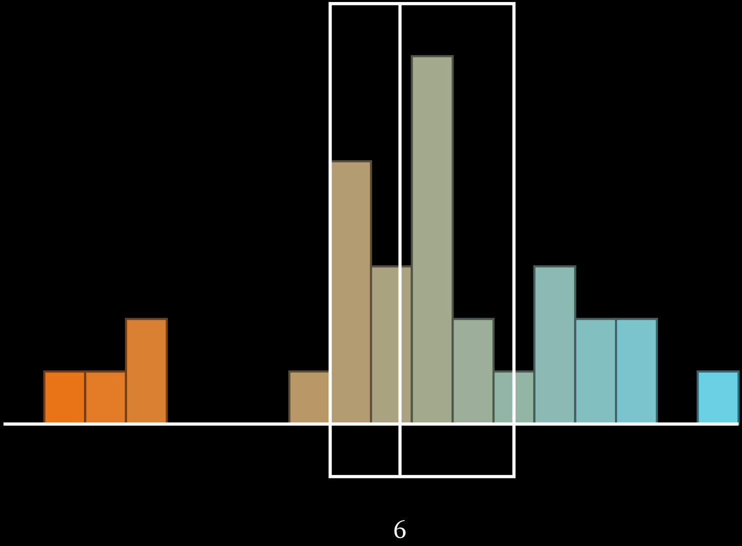
Deeltoets



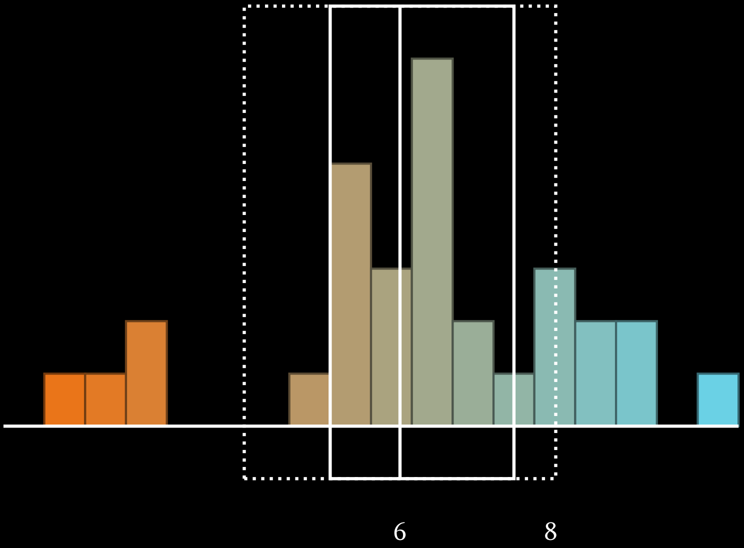
Deeltoets



Deeltoets



Deeltoets



Deeltoets 3.*i*

Lemma

De taal $\mathcal{L} := \left\{ \, (deel)^n (toets)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \, \right\}$ *is niet regulier.*

Deeltoets 3.*i*

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{ (deel)^n(toets)^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ *is niet regulier.*

Bewijs.

Voor elk woord $w \in \mathcal{L}$ is er een pomplengte p.

$\blacksquare$

Deeltoets 3.i

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \left\{ (deel)^n(toets)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$ *is niet regulier.*

Bewijs.

Voor elk woord $w \in \mathcal{L}$ is er een pomplengte p.

Neen!

$\blacksquare$

Deeltoets 3.*i*

Lemma

De taal $\mathcal{L} := \{\ (deel)^n(toets)^n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ is niet regulier.

Bewijs.

~~Voor elk woord $w \in \mathcal{L}$ is er een pomplengte p.~~

Neen!

$\blacksquare$

Deeltoets 3.i

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{\ (deel)^n (toets)^n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ *is niet regulier.*

Bewijs.
~~Voor elk woord $w \in \mathcal{L}$ is er een pomplengte p.~~ Stel $\mathcal{L}$ is wel regulier.
Dan is er een pomplengte p zodat voor alle $w \in \mathcal{L}$ met $|w| \geq p$
we hebben $w = xyz$ met $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$ en $xy^iz \in \mathcal{L}$ met $i \in \mathbb{N}$

$\blacksquare$

Deeltoets 3.i

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{\ (deel)^n (toets)^n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ *is niet regulier.*

Bewijs.
~~Voor elk woord $w \in \mathcal{L}$ is er een pomplengte p.~~ Stel $\mathcal{L}$ is wel regulier.
Dan is er een pomplengte p zodat voor alle $w \in \mathcal{L}$ met $|w| \geq p$
we hebben $w = xyz$ met $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$ en $xy^iz \in \mathcal{L}$ met $i \in \mathbb{N}$

Nee nee nee!

$\blacksquare$

Deeltoets 3.i

Lemma

De taal $\mathcal{L} := \left\{ \, (deel)^n (toets)^n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \, \right\}$ *is niet regulier.*

Bewijs.

~~Voor elk woord $w \in \mathcal{L}$ is er een pomplengte p.~~ Stel $\mathcal{L}$ is wel regulier.

~~Dan is er een pomplengte p zodat voor alle $w \in \mathcal{L}$ met $|w| \geq p$~~

~~we hebben $w = xyz$ met $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$ en $xy^iz \in \mathcal{L}$ met $i \in \mathbb{N}$~~

Nee nee nee!

∎

Deeltoets 3.i

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{\ (deel)^n (toets)^n \mid n \in \mathbb{N}\ \}$ is niet regulier.

Bewijs.
~~Voor elk woord $w \in \mathcal{L}$ is er een pomplengte p.~~ Stel $\mathcal{L}$ is wel regulier. Dan is er een pomplengte p zodat voor alle $w \in \mathcal{L}$ met $|w| \geq p$ ~~we hebben $w = xyz$ met $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$ en $xy^iz \in \mathcal{L}$ met $i \in \mathbb{N}$~~ er $x, y, z \in \Sigma^*$ zijn met $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$ en $xy^iz \in \mathcal{L}$ voor alle $i \in \mathbb{N}$.

■

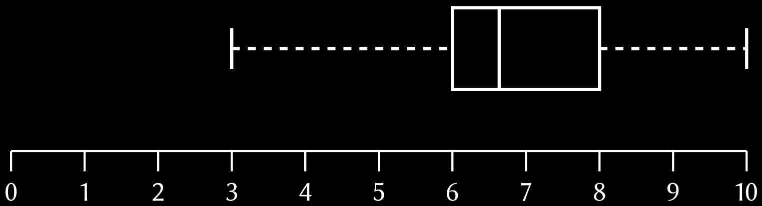
Deeltoets 3.i

Lemma
De taal $\mathcal{L} := \{ (deel)^n (toets)^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ is niet regulier.

Bewijs.

Stel $\mathcal{L}$ is wel regulier.
Dan is er een pomplengte p zodat voor alle $w \in \mathcal{L}$ met $|w| \geq p$ er $x, y, z \in \Sigma^*$ zijn met $w = xyz$, $|xy| \leq p$, $|y| \geq 1$ en $xy^iz \in \mathcal{L}$ voor alle $i \in \mathbb{N}$.
Verder, zie de uitwerking! ■

Inleveropgave 4



niet elke taal is beslisbaar

Complement

Als $\mathcal{L}$ beslisbaar is, dan is $\overline{\mathcal{L}}$ dat ook.

Diagonaliseren

$$\text{Diag} := \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ is een } \textsc{tm} \text{ en} \\ \text{accepteert } \langle M \rangle \end{array} \right\}$$

Onbeslisbaarheid

Lemma
Diag *is onbeslisbaar.*

Onbeslisbaarheid

Lemma
Diag *is onbeslisbaar.*

Bewijs.

Stel Diag is beslisbaar.

Onbeslisbaarheid

Lemma
Diag *is onbeslisbaar.*

Bewijs.

Stel Diag is beslisbaar. Dan is er een beslisser dan $\overline{\text{Diag}}$, zeg D.

Onbeslisbaarheid

Lemma
Diag *is onbeslisbaar.*

Bewijs.
Stel Diag is beslisbaar. Dan is er een beslisser dan $\overline{\text{Diag}}$, zeg D.
Onderscheidt twee gevallen:

$\blacksquare$

Onbeslisbaarheid

Lemma
Diag *is onbeslisbaar.*

Bewijs.
Stel Diag is beslisbaar. Dan is er een beslisser dan $\overline{\text{Diag}}$, zeg D.
Onderscheidt twee gevallen:

D accepteert $\langle D \rangle$ | D verwerpt $\langle D \rangle$

$\blacksquare$

Onbeslisbaarheid

Lemma
Diag *is onbeslisbaar.*

Bewijs.
Stel Diag is beslisbaar. Dan is er een beslisser dan $\overline{\text{Diag}}$, zeg D.
Onderscheidt twee gevallen:

D accepteert $\langle D \rangle$

D verwerpt $\langle D \rangle$

Dan volgt $\langle D \rangle \notin \overline{\text{Diag}}$.

∎

Onbeslisbaarheid

Lemma

Diag *is onbeslisbaar.*

Bewijs.

Stel Diag is beslisbaar. Dan is er een beslisser dan $\overline{\text{Diag}}$, zeg D.
Onderscheidt twee gevallen:

D accepteert $\langle D \rangle$

D verwerpt $\langle D \rangle$

Dan volgt $\langle D \rangle \notin \overline{\text{Diag}}$.
Dus $\langle D \rangle \notin \mathcal{L}(D)$.

∎

Onbeslisbaarheid

Lemma

Diag *is onbeslisbaar.*

Bewijs.

Stel Diag is beslisbaar. Dan is er een beslisser dan $\overline{\text{Diag}}$, zeg D.
Onderscheidt twee gevallen:

D accepteert $\langle D \rangle$

Dan volgt $\langle D \rangle \notin \overline{\text{Diag}}$.
Dus $\langle D \rangle \notin \mathcal{L}(D)$.
Tegenspraak!

D verwerpt $\langle D \rangle$

$\blacksquare$

Onbeslisbaarheid

Lemma
Diag *is onbeslisbaar.*

Bewijs.
Stel Diag is beslisbaar. Dan is er een beslisser dan $\overline{\text{Diag}}$, zeg D.
Onderscheidt twee gevallen:

D accepteert $\langle D \rangle$

Dan volgt $\langle D \rangle \notin \overline{\text{Diag}}$.
Dus $\langle D \rangle \notin \mathcal{L}(D)$.
Tegenspraak!

D verwerpt $\langle D \rangle$

Dan volgt $\langle D \rangle \in \overline{\text{Diag}}$.

$\blacksquare$

Onbeslisbaarheid

Lemma
Diag *is onbeslisbaar.*

Bewijs.
Stel Diag is beslisbaar. Dan is er een beslisser dan $\overline{\text{Diag}}$, zeg D.
Onderscheidt twee gevallen:

D accepteert $\langle D \rangle$

Dan volgt $\langle D \rangle \notin \overline{\text{Diag}}$.
Dus $\langle D \rangle \notin \mathcal{L}(D)$.
Tegenspraak!

D verwerpt $\langle D \rangle$

Dan volgt $\langle D \rangle \in \overline{\text{Diag}}$.
Dus $\langle D \rangle \in \mathcal{L}(D)$.

$\blacksquare$

Onbeslisbaarheid

Lemma
Diag *is onbeslisbaar.*

Bewijs.
Stel Diag is beslisbaar. Dan is er een beslisser dan $\overline{\text{Diag}}$, zeg D.
Onderscheidt twee gevallen:

D accepteert $\langle D \rangle$

Dan volgt $\langle D \rangle \notin \overline{\text{Diag}}$.
Dus $\langle D \rangle \notin \mathcal{L}(D)$.
Tegenspraak!

D verwerpt $\langle D \rangle$

Dan volgt $\langle D \rangle \in \overline{\text{Diag}}$.
Dus $\langle D \rangle \in \mathcal{L}(D)$.
Tegenspraak!

∎

Geaccepteerde Woorden

$$\mathrm{A}_{\textsc{tm}} := \left\{ \langle M, w \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ is een } \textsc{tm} \text{ en} \\ \text{accepteert } w \end{array} \right\}$$

Geaccepteerde Woorden

A_{TM} is niet beslisbaar

Bewijs

Stel A_{TM} is wel beslisbaar. Maak de volgende TM.

D = "Op invoer van een TM $\langle M \rangle$:

1. Test of $\langle M, \langle M \rangle \rangle \in A_{\text{TM}}$
2. Zo ja, accepteer. Zo nee, verwerp."

Bewijs

Stel A_{TM} is wel beslisbaar. Maak de volgende TM.

D = "Op invoer van een TM $\langle M \rangle$:

1. Test of $\langle M, \langle M \rangle \rangle \in \mathrm{A}_{\mathrm{TM}}$
2. Zo ja, accepteer. Zo nee, verwerp."

Zie dat D invoer $\langle M \rangle$ accepteert precies als M invoer $\langle M \rangle$ accepteert.

Bewijs

Stel A_{TM} is wel beslisbaar. Maak de volgende TM.

D = "Op invoer van een TM $\langle M \rangle$:

1. Test of $\langle M, \langle M \rangle \rangle \in A_{\text{TM}}$
2. Zo ja, accepteer. Zo nee, verwerp."

Zie dat D invoer $\langle M \rangle$ accepteert precies als M invoer $\langle M \rangle$ accepteert.

Dus D beslist Diag.

Bewijs

Stel A_{TM} is wel beslisbaar. Maak de volgende TM.

D = "Op invoer van een TM $\langle M \rangle$:

1. Test of $\langle M, \langle M \rangle \rangle \in A_{TM}$
2. Zo ja, accepteer. Zo nee, verwerp."

Zie dat D invoer $\langle M \rangle$ accepteert precies als M invoer $\langle M \rangle$ accepteert.

Dus D beslist Diag.
Tegenspraak

Herkenbaar

Een taal $\mathcal{L}$ heet (Turing-) herkenbaar wanneer er een TM M bestaat met $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}$.

niet elke taal is herkenbaar

Markov's Principe

Lemma
Als $\mathcal{L}$ en $\overline{\mathcal{L}}$ herkenbaar zijn, dan zijn ze beslisbaar.

Markov's Principe

Lemma
Als $\mathcal{L}$ en $\overline{\mathcal{L}}$ herkenbaar zijn, dan zijn ze beslisbaar.

Bewijs.

Neem M en N TM's.

Markov's Principe

Lemma

Als $\mathcal{L}$ en $\overline{\mathcal{L}}$ herkenbaar zijn, dan zijn ze beslisbaar.

Bewijs.

Neem M en N TM's.
Construeer de volgende TM.

B = "Op invoer w:

1. Simuleer M en N parallel op het woord w.
2. Als M accepteert, accepteer.
   Als N accepteert, verwerp."

Markov's Principe

Lemma

Als $\mathcal{L}$ en $\overline{\mathcal{L}}$ herkenbaar zijn, dan zijn ze beslisbaar.

Bewijs.

Neem M en N TM's.
Construeer de volgende TM.

B = "Op invoer w:

1. Simuleer M en N parallel op het woord w.
2. Als M accepteert, accepteer.
   Als N accepteert, verwerp."

Bekijk een willekeurig woord w.

Markov's Principe

Lemma
Als $\mathcal{L}$ en $\overline{\mathcal{L}}$ herkenbaar zijn, dan zijn ze beslisbaar.

Bewijs.

Neem M en N TM's.
Construeer de volgende TM.

B = "Op invoer w:
1. Simuleer M en N parallel op het woord w.
2. Als M accepteert, accepteer.
   Als N accepteert, verwerp."

Bekijk een willekeurig woord w.
Je weet dat óf $w \in \mathcal{L}$ óf $w \in \overline{\mathcal{L}}$.

Markov's Principe

Lemma
Als $\mathcal{L}$ en $\overline{\mathcal{L}}$ herkenbaar zijn, dan zijn ze beslisbaar.

Bewijs.

Neem M en N TM's.
Construeer de volgende TM.

B = "Op invoer w:
1. Simuleer M en N parallel op het woord w.
2. Als M accepteert, accepteer.
   Als N accepteert, verwerp."

Bekijk een willekeurig woord w.
Je weet dat óf $w \in \mathcal{L}$ óf $w \in \overline{\mathcal{L}}$.
Dus óf M accepteert óf N accepteert ooit bij invoer w.

Markov's Principe

Lemma
Als $\mathcal{L}$ en $\overline{\mathcal{L}}$ herkenbaar zijn, dan zijn ze beslisbaar.

Bewijs.

Neem M en N TM's.
Construeer de volgende TM.

B = "Op invoer w:
1. Simuleer M en N parallel op het woord w.
2. Als M accepteert, accepteer. Als N accepteert, verwerp."

Bekijk een willekeurig woord w.
Je weet dat óf $w \in \mathcal{L}$ óf $w \in \overline{\mathcal{L}}$.
Dus óf M accepteert óf N accepteert ooit bij invoer w.

Zodoende accepteert of verwerpt B bij elke invoer, en heeft taal $\mathcal{L}$. ■

Onherkenbare taal

$\overline{A_{TM}}$ is niet herkenbaar

Reductie

Definitie
De taal A reduceert tot B, schrijf $A \leq_{\mathrm{m}} B$, als er een berekenbare functie $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ is met:

$$w \in A \quad \text{precies als} \quad f(w) \in B$$

Reductie

Er is een TM M die als je 'm w voert, accepteert met $f(w)$ op de tape

Definitie
De taal A reduceert tot B, schrijf $A \leq_m B$, als er een berekenbare functie $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ is met :

$$w \in A \quad \text{precies als} \quad f(w) \in B$$

Voorbeelden van Reducties

$$\mathrm{Diag} \quad \leq_m \quad A_{\mathrm{TM}}$$

Voorbeelden van Reducties

$$\mathrm{Diag} \xrightarrow{\langle M \rangle \text{ naar } \langle M, \langle M \rangle \rangle} \leq_{\mathrm{m}} \quad A_{\mathsf{TM}}$$

Voorbeelden van Reducties

$$A_{\mathsf{TM}} \leq_m \overline{E_{\mathsf{TM}}}$$

Voorbeelden van Reducties

$\langle M, w \rangle$ naar "Op invoer v: voor $v = w$, accepteer als M accepteert op v"

$$\mathrm{A_{TM}} \leq_{\mathrm{m}} \overline{\mathrm{E_{TM}}}$$

Voorbeelden van Reducties

$$E_{\mathsf{TM}} \quad \leq_m \quad EQ_{\mathsf{TM}}$$

Voorbeelden van Reducties

$\langle M \rangle$ naar $\langle M, L \rangle$ met L TM voor lege taal

$$\mathrm{E}_{\mathrm{TM}} \quad \leq_{\mathrm{m}} \quad \mathrm{EQ}_{\mathrm{TM}}$$

Reductions en Complement

$A \leq_{\mathrm{m}} B$ precies als $\overline{A} \leq_{\mathrm{m}} \overline{B}$

Beslisbaarheid en reducties

Lemma
Stel $A \leq_{\mathrm{m}} B$ en B is beslisbaar. Dan is A ook beslisbaar.

Beslisbaarheid en reducties

Lemma

Stel $A \leq_{\mathrm{m}} B$ en B is beslisbaar. Dan is A ook beslisbaar.

Bewijs.

Neem f zó dat $w \in A$ precies
als $f(w) \in B$.

Beslisbaarheid en reducties

Lemma
Stel $A \leq_{\mathrm{m}} B$ en B is beslisbaar. Dan is A ook beslisbaar.

Bewijs.

Neem f zó dat $w \in A$ precies als $f(w) \in B$. Beschouw de volgende TM.

M = "Op invoer w:
1. Bereken $f(w) = v$.
2. Test of $v \in B$.
3. Zo ja accepteer. Zo nee, verwerp."

Beslisbaarheid en reducties

Lemma
Stel $A \leq_{\mathrm{m}} B$ en B is beslisbaar. Dan is A ook beslisbaar.

Bewijs.

Neem f zó dat $w \in A$ precies als $f(w) \in B$. Beschouw de volgende TM.

M = "Op invoer w:

1. Bereken $f(w) = v$.
2. Test of $v \in B$.
3. Zo ja accepteer. Zo nee, verwerp."

Bekijk een woord $w \in \Sigma^*$.

Beslisbaarheid en reducties

Lemma
Stel $A \leq_{\mathrm{m}} B$ en B is beslisbaar. Dan is A ook beslisbaar.

Bewijs.

Neem f zó dat $w \in A$ precies als $f(w) \in B$. Beschouw de volgende TM.

M = "Op invoer w:

1. Bereken $f(w) = v$.
2. Test of $v \in B$.
3. Zo ja accepteer. Zo nee, verwerp."

Bekijk een woord $w \in \Sigma^*$. Zie dat $f(w)$ altijd berekend kan worden.

Beslisbaarheid en reducties

Lemma
Stel $A \leq_{\mathrm{m}} B$ en B is beslisbaar. Dan is A ook beslisbaar.

Bewijs.

Neem f zó dat $w \in A$ precies als $f(w) \in B$. Beschouw de volgende TM.

M = "Op invoer w:

1. Bereken $f(w) = v$.
2. Test of $v \in B$.
3. Zo ja accepteer. Zo nee, verwerp."

Bekijk een woord $w \in \Sigma^*$. Zie dat $f(w)$ altijd berekend kan worden. De test $v \in B$ is beslisbaar bij aanname.

Beslisbaarheid en reducties

Lemma
Stel $A \leq_{\mathrm{m}} B$ en B is beslisbaar. Dan is A ook beslisbaar.

Bewijs.

Neem f zó dat $w \in A$ precies als $f(w) \in B$. Beschouw de volgende TM.

M = "Op invoer w:

1. Bereken $f(w) = v$.
2. Test of $v \in B$.
3. Zo ja accepteer. Zo nee, verwerp."

Bekijk een woord $w \in \Sigma^*$. Zie dat $f(w)$ altijd berekend kan worden. De test $v \in B$ is beslisbaar bij aanname. Die test slaagt precies als $w \in A$.

Beslisbaarheid en reducties

Lemma
Stel $A \leq_{\mathrm{m}} B$ en B is beslisbaar. Dan is A ook beslisbaar.

Bewijs.

Neem f zó dat $w \in A$ precies als $f(w) \in B$. Beschouw de volgende TM.

M = "Op invoer w:
1. Bereken $f(w) = v$.
2. Test of $v \in B$.
3. Zo ja accepteer. Zo nee, verwerp."

Bekijk een woord $w \in \Sigma^*$. Zie dat $f(w)$ altijd berekend kan worden. De test $v \in B$ is beslisbaar bij aanname. Die test slaagt precies als $w \in A$.

Dus M beslist A.

∎

Reguliere Taal

$$\text{Regular}_{\text{DFA}} := \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ is een DFA en} \\ \text{d'r taal is regulier} \end{array} \right\}$$

Reguliere Taal

$$\text{Regular}_{\textsc{cfg}} := \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ is een } \textsc{cfg} \text{ en} \\ \text{d'r taal is regulier} \end{array} \right\}$$

Reguliere Taal

$$\text{Regular}_{\textsc{tm}} := \left\{ \langle M \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ is een } \textsc{tm} \quad \text{en} \\ \text{d'r taal is regulier} \end{array} \right\}$$

Reductie

Lemma

$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Reductie

Lemma
$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$,
construeer de TM.
N = "Op invoer v:

1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Reductie

Lemma

$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$,
construeer de TM.
N = "Op invoer v:

1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Reductie

Lemma
$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$,
construeer de TM.
N = "Op invoer v:

1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$.

Reductie

Lemma

$\text{A}_{TM} \leq_{\text{m}} \text{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$, construeer de TM.

N = "Op invoer v:

1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Stel $\langle M, w \rangle \in \text{A}_{\text{TM}}$. Ieder woord wordt door N geaccepteerd.

Reductie

Lemma
$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$, construeer de TM.
N = "Op invoer v:
1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Ieder woord wordt door N geaccepteerd. Dus $\langle N \rangle \in \text{Regular}_{TM}$.

Reductie

Lemma

$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$, construeer de TM.

N = "Op invoer v:

1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Ieder woord wordt door N geaccepteerd. Dus $\langle N \rangle \in \text{Regular}_{TM}$.

Stel $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$.

Reductie

Lemma

$\mathrm{A}_{TM} \leq_{\mathrm{m}} \mathrm{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$, construeer de TM.

N = "Op invoer v:

1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Stel $\langle M, w \rangle \in \mathrm{A}_{\mathrm{TM}}$. Ieder woord wordt door N geaccepteerd. Dus $\langle N \rangle \in \mathrm{Regular}_{\mathrm{TM}}$.

Stel $\langle M, w \rangle \notin \mathrm{A}_{\mathrm{TM}}$. Alleen palindromen worden door N geaccepteerd.

Reductie

Lemma

$A_{TM} \leq_m \text{Regular}_{TM}$

Bewijs.

Gegeven $\langle M, w \rangle$, construeer de TM.

N = "Op invoer v:

1. Test of het woord v een palindroom is.
2. Zo ja, accepteer.
3. Zo nee, simuleer M op w en accepteer als ze accepteert."

Stel $\langle M, w \rangle \in A_{TM}$. Ieder woord wordt door N geaccepteerd. Dus $\langle N \rangle \in \text{Regular}_{TM}$.

Stel $\langle M, w \rangle \notin A_{TM}$. Alleen palindromen worden door N geaccepteerd. Dus $\langle N \rangle \notin \text{Regular}_{TM}$.

∎

Herkenbaarheid en reducties

Lemma
Stel $A \leq_m B$ en B is beslisbaar. Dan is A ook beslisbaar.

Bewijs.

Neem f zó dat $w \in A$ precies als $f(w) \in B$. Beschouw de volgende TM.

M = "Op invoer w:
1. Bereken $f(w) = v$.
2. Test of $v \in B$.
3. Zo ja accepteer. Zo nee, verwerp. "

Bekijk een woord $w \in \Sigma^*$. Zie dat $f(w)$ altijd berekend kan worden.

De test $v \in B$ is beslisbaar bij aanname. Die test slaagt precies als $w \in A$.

Dus M beslist A. ∎

Herkenbaarheid en reducties

Lemma
Stel $A \leq_{\mathrm{m}} B$ en B is herkenbaar. Dan is A ook herkenbaar.

Bewijs.

Neem f zó dat $w \in A$ precies als $f(w) \in B$. Beschouw de volgende TM.

M = "Op invoer w:
1. Bereken $f(w) = v$.
2. Test of $v \in B$.
3. Zo ja accepteer. Zo nee, verwerp. "

Bekijk een woord $w \in \Sigma^*$. Zie dat $f(w)$ altijd berekend kan worden.

De test $v \in B$ is beslisbaar bij aanname. Die test slaagt precies als $w \in A$.

Dus M beslist A. ■

Herkenbaarheid en reducties

Lemma

Stel $A \leq_{\mathrm{m}} B$ en B is herkenbaar. Dan is A ook herkenbaar.

Bewijs.

Neem f zó dat $w \in A$ precies als $f(w) \in B$. Beschouw de volgende TM.

M = "Op invoer w:

1. Bereken $f(w) = v$.
2. Simuleer B op v
3. Als B ooit accepteert, accepteer."

Bekijk een woord $w \in \Sigma^*$. Zie dat $f(w)$ altijd berekend kan worden.

De test $v \in B$ is beslisbaar bij aanname. Die test slaagt precies als $w \in A$.

Dus M beslist A. ■

Herkenbaarheid en reducties

Lemma
Stel $A \leq_{\mathrm{m}} B$ en B is herkenbaar. Dan is A ook herkenbaar.

Bewijs.

Neem f zó dat $w \in A$ precies als $f(w) \in B$. Beschouw de volgende TM.

M = "Op invoer w:
1. Bereken $f(w) = v$.
2. Simuleer B op v
3. Als B ooit accepteert, accepteer."

Bekijk een woord $w \in \Sigma^*$. Zie dat $f(w)$ altijd berekend kan worden.

Als $v \in A$ dan accepteert B op $f(w)$.

Dus M beslist A. ■

Herkenbaarheid en reducties

Lemma
Stel $A \leq_{\mathrm{m}} B$ en B is herkenbaar. Dan is A ook herkenbaar.

Bewijs.

Neem f zó dat $w \in A$ precies als $f(w) \in B$. Beschouw de volgende TM.

M = "Op invoer w:
1. Bereken $f(w) = v$.
2. Simuleer B op v
3. Als B ooit accepteert, accepteer."

Bekijk een woord $w \in \Sigma^*$. Zie dat $f(w)$ altijd berekend kan worden.

Als $v \in A$ dan accepteert B op $f(w)$.

Dus M herkent A. ■

Geen Reductie

$$A_{\text{TM}} \not\leq_m E_{\text{TM}}$$

Geen Reductie

$$\mathrm{A}_{\mathsf{TM}} \not\leq_{\mathrm{m}} \mathrm{E}_{\mathsf{TM}}$$

Bewijs.

Als $\mathrm{A}_{\mathsf{TM}} \leq_{\mathrm{m}} \mathrm{E}_{\mathsf{TM}}$, dan $\overline{\mathrm{A}_{\mathsf{TM}}} \leq_{\mathrm{m}} \overline{\mathrm{E}_{\mathsf{TM}}}$.

Geen Reductie

$$A_{TM} \not\leq_m E_{TM}$$

Bewijs.

Als $A_{TM} \leq_m E_{TM}$, dan $\overline{A_{TM}} \leq_m \overline{E_{TM}}$. Omdat $\overline{E_{TM}}$ herkenbaar is, moet $\overline{A_{TM}}$ dat ook zijn.

Geen Reductie

$$A_{\mathsf{TM}} \not\leq_m E_{\mathsf{TM}}$$

Bewijs.

Als $A_{\mathsf{TM}} \leq_m E_{\mathsf{TM}}$, dan $\overline{A_{\mathsf{TM}}} \leq_m \overline{E_{\mathsf{TM}}}$. Omdat $\overline{E_{\mathsf{TM}}}$ herkenbaar is, moet $\overline{A_{\mathsf{TM}}}$ dat ook zijn. Maar dat is ze niet! ∎

Gezien

Reducties

Behouden beslisbaarheid & herkenbaarheid.

Gezien

Reducties

Behouden beslisbaarheid & herkenbaarheid.

Onbeslisbare Talen

	Diag	$\overline{\text{Diag}}$
	A_{TM}	$\overline{A_{TM}}$
Regular_{TM}	E_{TM}	$\overline{E_{TM}}$
	EQ_{TM}	$\overline{EQ_{TM}}$

Gezien

Reducties

Behouden beslisbaarheid & herkenbaarheid.

Onbeslisbare Talen

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Diag} \arrow[d] & \overline{\mathrm{Diag}} \\
 & A_{\mathsf{TM}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \overline{A_{\mathsf{TM}}} \\
\mathrm{Regular}_{\mathsf{TM}} & E_{\mathsf{TM}} \arrow[d] & \overline{E_{\mathsf{TM}}} \\
 & EQ_{\mathsf{TM}} & \overline{EQ_{\mathsf{TM}}}
\end{tikzcd}
$$

Gezien

Reducties

Behouden beslisbaarheid & herkenbaarheid.

Onbeslisbare Talen

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Diag} \arrow[d] & \overline{\mathrm{Diag}} \arrow[d] \\
 & A_{\mathrm{TM}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \overline{A_{\mathrm{TM}}} \arrow[dl] \\
\mathrm{Regular}_{\mathrm{TM}} & E_{\mathrm{TM}} \arrow[d] & \overline{E_{\mathrm{TM}}} \arrow[d] \\
 & EQ_{\mathrm{TM}} & \overline{EQ_{\mathrm{TM}}}
\end{tikzcd}
$$

Gezien

Reducties

Behouden beslisbaarheid & herkenbaarheid.

Onbeslisbare Talen

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Diag} \arrow[d] & \overline{\mathrm{Diag}} \arrow[d] \\
 & A_{TM} \arrow[dl] \arrow[dr] & \overline{A_{TM}} \arrow[dl] \\
\mathrm{Regular}_{TM} & E_{TM} \arrow[d] & \overline{E_{TM}} \arrow[d] \\
 & EQ_{TM} & \overline{EQ_{TM}}
\end{tikzcd}$$

Gezien

Reducties

Behouden beslisbaarheid & herkenbaarheid.

Onbeslisbare Talen