Logische Complexiteit
NP-volledigheid

Jeroen Goudsmit

dinsdag 3 april

Hieronder uitwerkingen bij de inleveropgave 8 van Logische Complexiteit zoals gegeven in het academisch jaar 2011–2012. Dit document is bedoelt je te laten zien hoe je iedere vraag *had kunnen* beantwoorden, niet hoe je per se had moeten antwoorden. Als je fouten ziet, meldt dat dan a.u.b. bij Jeroen Goudsmit.

Opgave 1 — Kleine Problemen

Lemma 1. *De onderstaande* LangPad *taal is* NP*-volledig.*

$$\text{LangPad} := \left\{ \langle G, k \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} G \textit{ is een gerichte graaf wat een} \\ \textit{simpel}^1 \textit{ pad van lengte minstens } k \textit{ bevat} \end{array} \right\}$$

Bewijs. We bewijzen eerst dat LangPad in NP zit. Hiertoe geven we de volgende controleur.

M = "Op invoer $\langle \langle G, k \rangle, c \rangle$ met G een graaf, k een natuurlijk getal:
1. Test of $c = \langle c_1, \ldots, c_l \rangle$ een rijtje van l knopen uit G is.
2. Test of de opeenvolgende knopen in c verbonden zijn met een lijn.
3. Test of $l \geq k$.
4. Test of er dubbele knopen in c zitten.
4. Als (1), (2) en (3) slagen en (4) faalt, accepteer. Zo niet, verwerp.

Indien G een pad heeft van lengte k, zeg $c_1, \ldots, c_k$, dan voldoet $c := \langle c_1, \ldots, c_k \rangle$ als getuige, en accepteert M op invoer $\langle \langle G, k \rangle, c \rangle$. Andersom, als $\langle \langle G, k \rangle, c \rangle$ geaccepteerd wordt door M, dan moet c wel een pad van lengte k in G zijn, dus zit $\langle G, k \rangle$ in LangPad.

Nu bewijzen we dat HamPath $\leq_\text{p}$ LangPad. Gegeven een graaf $G = \langle V, E \rangle$ en knopen $s, t \in V$ maken we nu een nieuwe graaf $\underline{G} := \langle \underline{V}, \underline{E} \rangle$ en een getal $k = |V| + 2$. De nieuwe graaf zal zo zijn dat ze een simpel pad van lengte k heeft precies als G een Hamiltoniaans pad heeft van s naar t. Maak twee nieuwe knopen $\underline{s}$ en $\underline{t}$ en definieer $\underline{V} = V \cup \{\underline{s}, \underline{t}\}$. De nieuwe pijlen worden $\underline{E} := E \cup \{\langle \underline{s}, s \rangle, \langle t, \underline{t} \rangle\}$.

Stel $\langle G, s, t \rangle \in$ HamPath. Dan is er dus een simpel pad $c_1, \ldots, c_n$ in G met $n = |V|$ en $c_1 = s$, $c_n = t$. Dit geeft een simpel pad $\underline{s}, c_1, \ldots, c_n, \underline{t}$ in $\underline{G}$. Dit pad heeft lengte $|V| + 2 = k$, dus $\langle \underline{G}, k \rangle \in$ LangPad.

Andersom, stel dat $\langle \underline{G}, k \rangle \in$ LangPad. Dit geeft een pad $c_0, \ldots, c_{|V|+1}$. Merk op dat $c_0 = \underline{s}$ en $c_{|V|+1} = \underline{t}$ moet gelden. Immers, als een van die twee vergelijkingen niet geldt, moet er een simpel pad zijn in G met meer knopen dan G heeft, een onmogelijkheid. Dit maakt dat $c_1, \ldots, c_{|V|}$ een simpel pad in G is met lengte het aantal knopen. Dit is dus een Hamiltoniaans pad, en omdat $\underline{s}$ en $\underline{t}$ enkel verbonden zijn met s en t begint en eindigt dit pad in s en t. Dus $\langle G, s, t \rangle \in$ HamPath.

Dit bewijst de reductie. Omdat HamPath NP-volledig is, weten we nu dat LangPad het ook moet zijn. □

Opgave 2 — Lussen

Bewijs dat de volgende taal NP-volledig is.

$$\text{HamLus} := \left\{ \langle G \rangle \mid G \text{ is een gerichte graaf met een lus die elke knoop precies één keer raakt.} \right\}$$

Lemma 2. HamLus *is* NP-*volledig.*

Bewijs. We bewijzen eerst dat HamLus in NP zit, en daarna geven we een reductie van HamPath naar HamLus. Omdat HamPath NP-volledig is, volgt het gewenste hieruit.

Definiëer de volgende TM. $M :=$ "Op invoer $\langle \langle G \rangle, c \rangle$
1. Test of $c = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ een rijtje van $n = |V|$ knopen uit G is.
2. Test of opeenvolgende knopen in c verbonden zijn.
3. Test of c_n en c_1 verbonden zijn.
4. Test of er dubbele knopen in c zitten.
5. Als (1), (2) en (3) slagen en (4) faalt, accepteer. Zo niet, verwerp."

Deze machine M is een controleur voor HamLus. Immers, stel $\langle G \rangle \in$ HamLus. Schrijf voor de handzaamheid $G = \langle V, E \rangle$. Dan is er een pad $c_1, \ldots, c_n$ met $n = |V|$ zodanig dat c_n verbonden is met c_1, en dat $c_i = c_j$ impliceert $i = j$ voor alle $1 \leq i, j \leq n$. Het is nu gemakkelijk te zien dat $c = \langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ een getuige vormt voor $\langle G \rangle$, dat wil zeggen, $\langle G, c \rangle$ wordt geaccepteerd door M.

Andersom, als er een getuige c is zodat $\langle G, c \rangle$ geaccepteerd wordt door M, dan moet c de code zijn van een pad $c_1, \ldots, c_{|V|}$ met $c_{|V|}$ en c_1 verbonden. Dus is er een lus die alle knopen in G precies een keer raakt, waarmee $\langle G \rangle \in$ HamLus.

Nu geven we een reductie van HamPath naar HamLus. Gegeven een graaf $G = \langle V, E \rangle$ en knopen $s, t \in V$ maken we een graaf $\underline{G} = \langle \underline{V}, \underline{E} \rangle$. Voor de handzaamheid, schrijf $n := |V|$. Stel in:

$$\begin{aligned} \underline{V} &:= V \cup \{\underline{*}\} \\ \underline{E} &:= E \cup \{\langle \underline{*}, s \rangle, \langle t, \underline{*} \rangle\} \end{aligned}$$

Stel $\langle G, s, t \rangle \in$ HamPath. Dan is er een Hamiltoniaans pad tussen s en t, zeg $c_1, \ldots, c_n$ in G. Dit geeft een pad $c_1, \ldots, c_n, \underline{*}$ in $\underline{G}$. Dit pad is een lus wat elke knoop precies een keer raakt. Dus $\langle \underline{G} \rangle \in$ HamLus.

Andersom, stel $\langle \underline{G} \rangle \in$ HamLus. Dit geeft een lus $c_1, \ldots, c_n$ in $\underline{G}$ die elke knoop precies een keer raakt. Dus is er precies één $1 \leq i \leq n$ zodat $c_i = \underline{*}$. Zie nu dat $c_{i+1}, \ldots, c_n, c_1, \ldots, c_{i-1}$ een pad is in $\underline{G}$. Sterker, dit is een Hamiltoniaans pad. Omdat er een pijl tussen $\underline{*} = c_i$ en c_{i+1} zit moet c_{i+1} gelijk zijn aan s, en om soortgelijke reden is c_{i-1} gelijk aan t. Dit bewijst dat er een Hamiltoniaans pad in G tussen s en t is. Dus $\langle G, s, t \rangle \in$ HamPath. $\square$