LOGISCHE COMPLEXITEIT

EINDTOETS

Dinsdag 12 april 2011

Deze toets bestaat uit Opgave 1, 2, 3, 4 en 5. Lees de opgaven zorgvuldig door, en beargumenteer je antwoorden *kort en helder*. Voor dit tentamen heb je *drie uur* de tijd.

OPGAVE I — Minimum

Geef een abacus machine die, wanneer ze gestart wordt met x in register R en y in register S, eindigt met het minimum van x en y in register T.

OPGAVE II — Inclusie

We definiëren de volgende taal A:

$$A = \left\{ \langle M, N \rangle \mid M \text{ en } N \text{ zijn TM's en } \mathcal{L}(M) \subseteq \mathcal{L}(N) \right\}.$$

Is A beslisbaar? Geef een kort bewijs voor je antwoord.

OPGAVE III — Minstens twee elementen

We definiëren de volgende taal B:

$$B = \left\{ \langle M \rangle \mid M \text{ is een TM en } \mathcal{L}(M) \text{ bevat minstens twee elementen} \right\}.$$

(a) Bewijs dat B TM-herkenbaar is.

(b) Bewijs dat B onbeslisbaar is.

OPGAVE IV — HITTING-SET

We definiëren de volgende taal:

$$\textsc{hitting-set} = \left\{ \langle S, C, k \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} S \text{ is een eindige verzameling, } C \subseteq \mathcal{P}(S) \text{ en } k \geq 0\text{, zodat} \\ \text{er een } S' \subseteq S \text{ is met } |S'| \leq k \text{ en voor alle } c \in C,\, c \cap S' \neq \emptyset \end{array} \right\}.$$

In woorden omschreven in HITTING-SET dus de taal der drie-tupels $\langle S, C, k \rangle$ waar

- S een eindige verzameling is;
- C een verzameling van deelverzamelingen van S is;
- k een positief geheel getal is;

zodanig dat er een deelverzameling S' van S is die een niet-lege doorsnede met ieder element van C heeft: S' is hier een 'hitting set' die elk element van C 'raakt'.

(a) Neems $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C_1 = \big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\big\}$ en $C_2 = \big\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5\}, \{3, 4, 5\}\big\}$. Laat zien dat $\langle S, C_1, 2\rangle \in$ HITTING-SET, d.w.z. dat er een hitting set van grootte ≤ 2 is voor C_1, maar dat $\langle S, C_2, 2\rangle \notin$ HITTING-SET, d.w.z. dat er geen hitting set van grootte ≤ 2 is voor C_2.

(b) Laat zien dat HITTING-SET in NP zit.

(c) Laat zien dat HITTING-SET NP-volledig is. Hint: gebruik VERTEX-COVER.

OPGAVE V — Hardness

Laat zien dat elke taal die PSPACE-hard is, ook NP-hard is. Hint: gebruik SAT en TQBF.