Logische Complexiteit
Eindtoets

donderdag 12 april 2012
13:30 – 16:30

Dit tentamen bestaat uit Opgave 1, 2, 3, 4, 5 en 6. Lees eerst alle vragen zorgvuldig, en maak goed gebruik van **alle** tijd.

Beargumenteer je antwoorden *kort en helder*. Zorg ervoor dat je argument zowel formeel klopt (alle stappen zijn daadwerkelijk gerechtvaardigd) en intuïtief duidelijk is. Niet ieder detail hoeft uitgewerkt te worden. Voor dit tentamen heb je drie uur de tijd.

Opgave 1 — Verschil

Beschouw de taal $\mathrm{V}_{\textsc{dfa}}$ als hieronder gedefinieerd. Bewijs dat deze taal beslisbaar is.

$$\mathrm{V}_{\textsc{dfa}} := \left\{ \langle M, N \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ en } N \text{ zijn } \textsc{dfa}\text{'s over hetzelfde alfabet en} \\ \text{het verschil } \mathcal{L}(M) - \mathcal{L}(N) \text{ is eindig groot} \end{array} \right\}$$

Opgave 2 — Onherkenbaar Verschil

De hieronder gedefinieerde taal $\mathrm{V}_{\textsc{tm}}$ lijkt wat op die in Opgave 1, maar nu met TM's in plaats van DFA's. Dit geeft een heel andere taal. Bewijs dat de taal $\mathrm{V}_{\textsc{tm}}$ noch herkenbaar, noch beslisbaar is.

$$\mathrm{V}_{\textsc{tm}} := \left\{ \langle M, N \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ en } N \text{ zijn } \textsc{tm}\text{'s over hetzelfde alfabet en} \\ \text{het verschil } \mathcal{L}(M) - \mathcal{L}(N) \text{ is eindig groot} \end{array} \right\}$$

Opgave 3 — Dubbel oneindige tapes

Herinner je dat in onze definitie van een Turingmachine de tape enkel oneindig is naar rechts toe. Een *dubbel oneindige TM* (DTM) heeft een tape die beide kanten op oneindig is. In de startconfiguratie is de gehele tape leeg, behalve het stuk waar de invoer staat, en de leeskop van de DTM staat aan de linkerkant van de invoer.

(a) Bewijs dat een taal $\mathcal{L}$ herkend wordt door een DTM precies als $\mathcal{L}$ herkend wordt door een TM.

Ruimtecomplexiteit hebben we gedefinieerd voor TM's die werken op een enkelzijdig oneindige tape. Voor een DTM definiëren we de tijdscomplexiteit als:

$$n \in \mathbb{N} \quad \mapsto \quad \max \left\{ \begin{array}{l} \text{maximale afstand van leeskop t.o.v.} \\ \text{startconfiguratie bij berekenen met invoer } w \end{array} \;\middle|\; w \text{ een woord van lengte } n \right\}$$

(b) Beargumenteer dat het hebben van een dubbel of enkel oneindige tape geen verschil maakt wat betreft het hebben van polynomiale ruimtecomplexiteit.

Opgave 4 — Maximale Vervulling

Bewijs dat de onderstaande taal MaxSat NP-volledig is. Herinner je dat CNV staat voor conjunctieve normaalvorm.

$$\text{MaxSat} := \left\{ \langle \phi, n \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi \text{ is een formule in CNV waarvoor een bedeling} \\ \text{bestaat die minstens } n \text{ clausules waarmaakt} \end{array} \right\}$$

Opgave 5 — Accepteren

Bewijs dat de taal $\text{A}_{\text{NFA}} := \{ \langle M, w \rangle \mid M \text{ is een NFA die } w \text{ accepteert} \}$ in PSPACE zit.

Opgave 6 — Anagram

Een *anagram* van een zin w is een zin die te verkrijgen is door de letters uit w in volgorde te verplaatsen, met eventueel een ander aantal spaties. Bewijs dat de onderstaande taal Fijn onbeslisbaar is.

$$\text{Fijn} := \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is een TM die precies anagrammen van “fijn tentamen” accepteert} \}$$